В.Ю. Дубницький¹, А.М. Кобилін¹, О.А. Кобилін²

¹Харківський навчально-науковий інститут ДВНЗ Університету банківської справи, Харків

²Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків

ПРЯМА І ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ КРИТЕРІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ОТРИМАНИХ НА ОСНОВІ ПІ – ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ

Визначено поняття систем, які можна фізично реалізувати, як таких систем, що представлені сукупністю фізичних елементів, структурно пов'язаних між собою, і які взаємодіють із зовнішнім середовищем. Для їх дослідження запропоновано використання критеріальних рівнянь, складених на основі Пі – теореми теорії подібності.

Показано, що виходячи з вимог теорії подібності ці рівняння співпадають з функцією Кобба – Дугласа. Сформульовану пряму та обернену задачу визначення параметрів критеріальних рівнянь. Пряма задача визначення параметрів критеріальних рівнянь співпадає з задачею ідентифікації функції Кобба – Дугласа. В нашому випадку функцією та аргументами слугують відповідні безрозмірні величини – критерії подібності. Для розв'язання прямої задачі необхідно за даними експерименту з фізичною моделлю технічної системи визначити чисельні параметри цієї функції подібності. Для розв'язання цієї задачі використано алгоритм Марквардта. Пряма задача може бути використана в процесі аналізу технічної системи. Обернену задачу визначення параметрів критеріальних рівнянь можна розглядати як задачу синтезу технічної системи. Для її розв'язання запропоновано двохетапну процедуру. На першому етапі визначають необхідні значення критеріїв – аргументів, на другому визначають безпосередньо значення фізичних параметрів системи, необхідних для забезпечення чисельної величини обраного критерію подібності. Для розв'язання оберненої задачі використано метод дослідження простору параметрів. Наведено чисельний приклад застосування викладеної методики.

Ключові слова: теорія подібності, критерії подібності, Пі – теорема теорії подібності, метод Марквардта, метод дослідження простору параметрів.

Вступ

Розглянемо технічну систему S , для якої визначено скінченну множину $\aleph$, яку будемо визначати як множину вхідних сигналів, скінченна множина $\mathfrak{Z}$, яку будемо визначати як множину параметрів системи і скінченну множину $\mathfrak{R}$, яку будемо визначати як скінченну множину вихідних сигналів системи. Припустимо, що чисельні значення елементів множин $\aleph = \hat{\aleph}$, $\mathfrak{Z} = \hat{\mathfrak{Z}}$, $\mathfrak{R} = \hat{\mathfrak{R}}$. В рамках даного повідомлення приймемо, що символ $\langle \cdot \rangle$ позначатиме задану підмножину множин можливих значень для множин $\aleph, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R}$:

$$\langle \hat{\mathfrak{Z}} \rangle \subseteq \hat{\mathfrak{Z}}, \quad \langle \hat{\aleph} \rangle \subseteq \hat{\aleph}, \quad \langle \hat{\mathfrak{R}} \rangle \subseteq \hat{\mathfrak{R}}. \quad (1)$$

Символ $\{\langle \cdot \rangle\}$ означає, що чисельні значення відповідних підмножин підлягають визначенню. В процесі моделювання технічних систем будемо розрізнятимемо наступні типи задач.

Пряма задача. Для відомих значень множини вхідних сигналів $\hat{\aleph}$ і вихідних сигналів $\hat{\mathfrak{R}}$ знайти параметри системи, тобто розв'язати задачу:

$$\langle \hat{\aleph} \rangle \{ \langle \hat{\mathfrak{Z}} \rangle \} = \langle \hat{\mathfrak{R}} \rangle. \quad (2)$$

Пряму задачу можна назвати задачею аналізу системи.

Обернена задача. Для відомих величин елементів множин $\hat{\mathfrak{Z}}$ і $\hat{\mathfrak{R}}$ знайти такі $\hat{\aleph}$, щоб було виконано умову:

$$\{ \langle \hat{\aleph} \rangle \} \langle \hat{\mathfrak{Z}} \rangle = \langle \hat{\mathfrak{R}} \rangle. \quad (3)$$

Обернену задачу можна назвати задачею синтезу системи.

В рамках даної роботи будемо розглядати тільки системи, що можна фізично реалізувати. У роботі [1] було наведено визначення системи, що можна фізично реалізувати. Це системи, які представлені сукупністю фізичних елементів, структурно зв'язані.

них між собою, і які взаємодіють із зовнішнім середовищем. Для аналізу і синтезу таких систем під час їх проектування використовують теорію подібності, основні положення якої викладено, наприклад, в роботах [2–3]. Для подальшого викладення результатів роботи використовуємо приведені в роботах [2–3] визначення. Припустимо, що зв'язок між параметрами процесу і параметрами системи, в якій цей процес відбувається, має вигляд:

$$f(P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_\gamma) = 0. \quad (4)$$

Припустимо, що для вивчення процесу обрана система одиниць, в якій

$$\rho = \gamma - (k + 1) \quad (5)$$

одиниць вимірювання незалежні і k – похідні величини, які можна подати як функцію незалежних одиниць вимірювання. В системі СІ це можуть бути, наприклад, величини L, M, T . Пі-теорема теорії подібності стверджує, що функціональна залежність між величинами, що характеризують процес, може бути подана у вигляді залежності між k критеріями подібності у вигляді:

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \dots, \pi_k). \quad (6)$$

Найчастіше залежність вигляду (6) використовують у вигляді (7), що обумовлене вимогами теорії:

$$\pi_1 = c \prod_{u=2}^k \pi_u^{\lambda_u}. \quad (7)$$

Процес отримання конкретного вигляду умови (4) залежить від фізичного змісту задачі, яку розв'язують, і в рамках даної роботи його не розглядають.

Задачу, для розв'язання якої потрібно за наслідками фізичного моделювання визначити чисельні значення величини c і величин λ_u , будемо називати

прямою задачею фізичного моделювання. Оберненою задачею фізичного моделювання будемо називати задачу, для розв'язання якої необхідно для відомого значення критерію π_1 і відомих величин c і λ_u визначити такі значення частинних критеріїв подібності π_u , щоб умову (7) було виконано із заздалегідь заданою точністю.

Аналіз літератури. В літературі по теорії подібності способи отримання чисельних значень величин c і λ_u не розглядають, припускаючи, за умовчанням, їх відомими. Функції вигляду (7) добре відомі в математичній економіці як функції Кобба-Дугласа. Найчастіше їх ідентифікація, тобто визначення чисельних значень величин c і λ_u , зводиться до задачі ідентифікації параметрів лінійного регресійного рівняння, яке отримують, логарифмуючи умову (4). В роботі [4] показано, що цей прийом приводить до отримання зсунених оцінок величин c і λ_u . Тому у вказаній роботі викладено двох етапну процедуру ідентифікації рівняння, заданого умовою (7). Основний (другий) етап реалізує один з методів нелінійної оптимізації. На першому етапі оцінки, отримані в результаті лінеаризації умови (4), служать початковим наближенням другого етапу розв'язання задачі. В даній роботі на другому етапі розв'язання задачі ідентифікації використано алгоритм Марквардта у вигляді, наведеному в роботі [5]. Детально методику отримання умови вигляду (7) розглянуто в роботі [6]. В цій роботі методами теорії подібності було вивчено процес екстрагування речовини з рослинної сировини. Перелік змінних, що впливають на цей процес, і їх фізичні розмірності наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Параметри, що впливають на процес екстрагування і їх розмірності

Параметр	Символ	Розмірність
Середній коефіцієнт масовіддачі	β	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Витрати продукту	M_{np}	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$
Коефіцієнт дифузії олії	D	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Різниця концентрацій	ΔC	$\text{кг} \cdot \text{см}^{-3}$
Розмір частинки, яку піддають екстрагуванню	d	м
Густина масового потоку	ρ	$\text{кг} \cdot \text{м}^3$
В'язкість потоку	μ	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$
Витрати розчинника	$M_{роз}$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$
Теплота пароутворення	r	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$
Потужність мікрохвильового поля	N	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$

Залежність (4) прийме вигляд:

$$\beta = f(M_{np}, D, \Delta C, d, \mu, M_{роз}, r, N, G). \quad (8)$$

Використовуючи Пі – теорему теорії подібності, умова (8) була перетворена в умову (9), відповідно з умовами (6) і (7):

$$Sh = c \cdot Sc^o \cdot \zeta^\pi \cdot Bu^\sigma. \quad (9)$$

Змінні, що входять в умову (9), мають наступний фізичний зміст:

Sh – число Шервуда, визначене за умовою:

$$Sh = \frac{\beta d}{D}; \quad (10)$$

Sc – число Шмідта, визначене за умовою:

$$Sc = \frac{\mu}{D\rho}. \quad (11)$$

Безрозмірний параметр, визначений за умовою:

$$\zeta = \frac{Mnp}{M\rho\omega}. \quad (12)$$

Число Бурдо, визначене за умовою:

$$Bu = \frac{N}{\mu dr}. \quad (13)$$

В результаті обробки експериментальних даних, методика якої в роботі [6] не описана, отримано для пари речовин “соя - гексан” вираз вигляду:

$$Sh = 0,7 \cdot Sc^{0,33} \cdot \zeta^{0,4} \cdot Bu^{0,2}. \quad (14)$$

На цьому розв’язання прямої задачі слід вважати завершеним.

Формулювання оберненої задачі в нашому випадку може мати два рівні. На першому рівні визначають, виходячи з фізичного змісту задачі, значення критерію π_1 і підбирають значення критеріїв $\pi_2, \dots, \pi_k$, що забезпечують з необхідною точністю виконання умови (6) або (7). На другому рівні, знаючи чисельні значення критеріїв $\pi_2, \dots, \pi_k$, обирають значення початкових параметрів системи, що забезпечують виконання умов (6) або (7). Природно, що розв’язання оберненої задачі не єдине. В рамках даної роботи використано метод пошуку

розв’язання оберненої задачі, який засновано на використанні майже рівномірно розподілених послідовностей, так званих ЛП_т – послідовностей. Його теоретичні основи описано в роботі [7]. Приклади застосування для розв’язання задач синтезу технічних систем наведено в роботах [7–10]. Використання методу майже рівномірно розподілених послідовностей для розв’язання задач теорії подібності, наскільки це відомо авторам даного повідомлення, в літературі не розглянуто.

Мета роботи. Адаптація алгоритму Марквардта для ідентифікації критеріальних рівнянь вигляду (4), отриманих на основі пі – теореми теорії подібності. Розв’язання оберненої задачі для рівняння вигляду (4) з метою синтезу параметрів систем, що фізично реалізуються.

Отримані результати

Адаптація алгоритму Марквардта для ідентифікації критеріальних рівнянь. Розглянемо розв’язання задачі ідентифікації критеріального рівняння вигляду (7). Величини чисельних значень критеріїв $\pi_1, \dots, \pi_k$ відомі за результатами n експериментів, необхідно визначити чисельні значення величин $\lambda_u, u = 1, 2, \dots, k$. Далі розглянемо, без обмеження узагальненості, розв’язання цієї задачі для $k = 2$ (Задача 1) і $k = 4$ (Задача 2). Порівняння цих двох варіантів дозволить з’ясувати узагальнення алгоритму для довільного значення k . Умови цих задач представлено в табл. 2.

Таблиця 2

Умови задач ідентифікації критеріальних рівнянь

Умові завдань		
Характеристики рівнянь	Завдання 1	Завдання 2
Критеріальне рівняння	$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$	$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$
Вигляд моделі	$K = ct^\alpha x^\beta$	$K = ct^\alpha x^\beta y^\gamma z^\delta$
Функція, яку необхідно мінімізувати	$L = \sum_{i=1}^n (K_i - ct_i^\alpha x_i^\beta)^2$	$L = \sum_{i=1}^n (K_i - ct_i^\alpha x_i^\beta y_i^\gamma z_i^\delta)^2$
Вектор змінних задачі	$U = (c, \alpha, \beta)$	$U = (c, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$

Тут і далі прийнято, що символом i позначено номер експерименту, в якому моделюють систему, що вивчається.

Для розв’язання задачі 1 необхідно визначити значення градієнта і гессіана функції L .

Визначення складових градієнта і гессіана для задачі 1. Загальний вигляд градієнта функції L наведено в умові (15):

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial c}, \frac{\partial L}{\partial \alpha}, \frac{\partial L}{\partial \beta} \right). \quad (15)$$

Прийmemo, що:

$$E_i = K_i t_i^\alpha x_i^\beta, \quad (16)$$

$$D_i = t_i^{2\alpha} x_i^{2\beta}. \quad (17)$$

Вирази для складових градієнта функції L наведено в табл. 3.

Загальний вид гессіана функції L наведено в умові (18):

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial c^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \alpha} & \frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial c} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial c} & \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Вирази для складових гессіана функції L наведено в табл. 4.

Визначення складових градієнта і гессіана для задачі 2. Загальний вигляд градієнта функції L наведено в умові (19):

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial c}, \frac{\partial L}{\partial \alpha}, \frac{\partial L}{\partial \beta}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}, \frac{\partial L}{\partial \delta} \right). \quad (19)$$

Прийmemo, що:

$$H_i = t_i^{2\alpha} x_i^{2\beta} y_i^{2\gamma} z_i^{2\delta}; \quad (20)$$

$$G_i = k_i t_i^\alpha x_i^\beta y_i^\gamma z_i^\delta. \quad (21)$$

Гессіаном функції вигляду $\eta = \varphi(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m)$ буде вираз вигляду:

$$H(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \chi_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \eta}{\partial \chi_1 \partial \chi_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \chi_m \partial \chi} & \dots & \frac{\partial^2 \eta}{\partial \chi_m^2} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Для задачі 2 компоненти гессіана функції L розташовані на головній діагоналі і вище за неї наведено в табл. 6.

Таблиця 3

Складові градієнта функції L для завдання 1

Частинні похідні першого порядку	Вирази для обчислення частинних похідних першого порядку
$\frac{\partial L}{\partial c}$	$2 \left[c \sum_{i=1}^n D_i - \sum_{i=1}^n E_i \right]$
$\frac{\partial L}{\partial \alpha}$	$2 \left[c^2 \sum_{i=1}^n D_i \ln t_i - c \sum_{i=1}^n E_i \ln t_i \right]$
$\frac{\partial L}{\partial \beta}$	$2 \left[c^2 \sum_{i=1}^n D_i \ln x_i - c \sum_{i=1}^n E_i \ln x_i \right]$

Таблиця 4

Складові гессіана функції L для задачі 1

Частинні похідні другого порядку	Вирази для обчислення частинних похідних другого порядку
$\frac{\partial^2 L}{\partial c^2}$	$2 \sum_{i=1}^n D_i$
$\frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \alpha}$	$2 \left[2c \sum_{i=1}^n D_i \ln t_i - \sum_{i=1}^n E_i \ln t_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \beta}$	$2 \left[2c \sum_{i=1}^n D_i \ln x_i - \sum_{i=1}^n E_i \ln x_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n D_i \ln^2 t_i - c \sum_{i=1}^n E_i \ln^2 t_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n D_i \ln t_i \ln x_i - c \sum_{i=1}^n E_i \ln t_i \ln x_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n D_i \ln^2 x_i - c \sum_{i=1}^n E_i \ln^2 x_i \right]$

Таблиця 5

Складові градієнта функції L для задачі 2

Частинні похідні першого порядку	Вирази для обчислення частинних похідних першого порядку
$\frac{\partial L}{\partial c}$	$2 \left[c \sum_{i=1}^n H_i - \sum_{i=1}^n G_i \right]$
$\frac{\partial L}{\partial \alpha}$	$2 \left[c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln t_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln t_i \right]$
$\frac{\partial L}{\partial \beta}$	$2 \left[c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln x_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln x_i \right]$
$\frac{\partial L}{\partial \gamma}$	$2 \left[c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln y_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln y_i \right]$
$\frac{\partial L}{\partial \delta}$	$2 \left[c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln z_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln z_i \right]$

Таблиця 6

Складові гессіана функції L для задачі 2

Частинні похідні другого порядку	Вирази для обчислення частинних похідних другого порядку
$\frac{\partial^2 L}{\partial c^2}$	$2 \sum_{i=1}^n H_i$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln^2 t_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln^2 t_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln^2 x_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln^2 x_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln^2 y_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln^2 y_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \delta^2}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln^2 z_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln^2 z_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \delta}$	$2 \left[2c \sum_{i=1}^n H_i \ln z_i - \sum_{i=1}^n G_i \ln z_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \alpha}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln t_i - \sum_{i=1}^n G_i \ln t_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \beta}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln x_i - \sum_{i=1}^n G_i \ln x_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \gamma}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln y_i - \sum_{i=1}^n G_i \ln y_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln t_i \ln x_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln t_i \ln x_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \gamma}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln t_i \ln y_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln t_i \ln y_i \right]$

$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \delta}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln t_i \ln z_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln t_i \ln z_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \gamma}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln x_i \ln y_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln x_i \ln y_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \delta}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln x_i \ln z_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln x_i \ln z_i \right]$
$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma \partial \delta}$	$2 \left[2c^2 \sum_{i=1}^n H_i \ln y_i \ln z_i - c \sum_{i=1}^n G_i \ln y_i \ln z_i \right]$

У загальному вигляді задачу ідентифікації виразу вигляду (7) надамо у вигляді:

$$L = \sum_{i=1}^n (\pi_{1i} - c \prod_{u=2}^k \pi_{ui}^{\lambda_u})^2 \rightarrow \min. \quad (23)$$

В умові (20) і далі прийнято що n – кількість експериментів, в яких моделюють поведінку системи, що вивчається. Для розв’язання дачі (23) методом Марквардта у вигляді, в якому його описано в роботі [5], необхідно знайти компоненти вектора початкового наближення $u^0 = \hat{c}, \hat{\pi}_2^0, \dots, \hat{\pi}_k^0$. Ці величини визначають класичним регресійним аналізом, вирішуючи задачу вигляду:

$$L_1 = \sum_{i=1}^n \left[\ln \pi_{1i} - \left(\ln c + \sum_{u=2}^k \lambda_u \ln \pi_{ui} \right) \right]^2 \rightarrow \min. \quad (24)$$

Для подальшого викладу введемо наступні позначення: ω – номер чергової ітерації; E – одинична матриця; $M = 4 \cdot 10^3$ – гранична кількість ітерацій; $\theta^0 = 10^4$ – обчислювальний параметр алгоритму, ці значення рекомендовано в роботі [5], похибка обчислень $\varepsilon = 10^{-3}$.

Метод Марквардта полягає в побудові послідовності точок $\{u^\omega\}$ таких, що

$$\omega = 0, 1, \dots, u^{\omega+1} = u^\omega - \left[H(u^\omega) + \mu^\omega E \right]^{-1} \nabla L(u^\omega). \quad (25)$$

Якщо:

$$L \left\{ u^\omega - \left[H(u^\omega) + \mu^\omega E \right]^{-1} \nabla L(u^\omega) \right\} < L(u^\omega), \quad (26)$$

то $\theta^{k+1} = \theta^k / 2$, у протилежному випадку $\theta^{k+1} = 2\theta^k$. Процес обчислення закінчується у тому випадку, коли $\|\nabla L(u^\omega)\| < \varepsilon$ або $\omega > M$.

Розв’язання оберненої задачі для критеріального рівняння з метою синтезу параметрів системи, яку можна фізично реалізувати. Розглянемо розв’язання оберненої задачі для рівняння вигляду (7). Приймаючи до уваги введені в умовах (1–3) позначення, будемо вважати, що множина $\aleph = \pi_2, \dots, \pi_k$, множина $\mathfrak{Z} = c, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, множина $\aleph = \pi_1$. Для розв’язання задачі синтезу технічних систем скористаємося методом ЛП_τ-послідовностей, теоретичні основи якого наведено в роботі [7]. Використання цього методу для розв’язання задач, пов’язаних з проектуванням організаційних і технічних систем, описано в роботах [8–10]. Припустимо, що для обчислення деякої величини існує деревоподібний багаторівневий алгоритм, відомий як дерево Канторовича. Для функції вигляду (6) отримаємо наступну схему обчислень. Приймемо, що $\pi_{1;0}; \pi_{2;0} \dots \pi_{n;0}$ – аргументи першого рівня і отримаємо дерево розрахунку цієї величини

Рис. 1. Побудова дерева формул

На рис. 1 прийнято, що в кутових дужках наведено чисельне значення, яке відповідає одній з основних одиниць системи СІ. Далі побудову дерева можна продовжити по аналогічній схемі.

Для подальшого розв’язання задачі скористаємося методом дослідження простору параметрів, теоретичні основи якого викладені в роботі [7].

Вважатимемо, для зручності виконання розрахунків, що на кожному рівні дерева в залежність вигляду $\pi_1 = \Phi(\pi_2, \dots, \pi_k)$ входять всі змінні даного рівня. Частина з них може бути нульовою.

Пропонується послідовність дій, що складається з наступних кроків.

Крок 1: Задаємо бажане значення підсумкового показника π_1 .

Крок 2: Задаємо допустимий інтервал невизначеності покрокового показника, тобто інтервали зміни змінних нульового рівня.

Крок 3: Використовуючи правила інтервального аналізу, обчислюємо допустимий інтервал для набутого значення так, як це викладено в роботі [1].

Якщо $\pi_1 \in [\pi_n; \pi_e]$, де π_n , π_e – ліва та права границі можливих значень відповідної величини, то переходимо до кроку 4, якщо $\pi_1 \notin [\pi_n; \pi_e]$, то задача розв'язку не має.

Крок 4: (цей крок використовується як загальний крок алгоритму). Якщо задача не має розв'язку,

то необхідно змінити інтервали невизначеності аргументів нульового рівня. Якщо завдання має розв'язок, то пошук значень змінних починають з рівня дерева з найбільшим номером.

Для кожної змінної кожного рівня беремо її допустимий інтервал розрахунку, і в цьому інтервалі визначаємо рівномірно розподілені випадкові числа.

Крок 5: Для вибраних випадкових чисел обчислюється відповідні показники і обирають ті значення, для яких модуль відхилення розрахункового значення від бажаного не перевищує заданої точності.

Крок 6: Маючи обчислені інтервали невизначеності, обчислюють інтервал відповідного показника для даного рівня дерева.

Розглянемо просту обернену задачу. Припустимо, що задана формула:

$$(AB) + (CD) = (20 \cdot 4) + (10 \cdot 2) = 100.$$

Дерево для отримання такого виразу наведено на рис. 2.

Рис. 2. Дерево формул (дерево Канторовича) для розв'язання прикладу оберненої задачі

Необхідно так змінити всі елементи виразу, не прирівнюючи жоден з них нулю, щоб отримати число 105, якщо діапазон інтервалу кожного елементу нижнього рівня складає $\pm 5\%$ від початкового, середнього значення, відповідного інтервалу. Розв'язувати задачу будемо методом дослідження простору параметрів.

Результат пошуку розв'язку наведено на рис. 3.

Відповідь знаходиться в рядку 17. Приведемо необхідні пояснення до рис. 3. Від значення кожного елементу відніманням і складанням 5% його початкового значення набуваємо відповідні інтервальні значення і занесемо їх в таблицю.

Наступним кроком знайдемо числа, вказані в стовпцях E і F. Для цього проведемо необхідні арифметичні операції. Далі знаходимо чисельні значення елементів стовпця G. Його значення визначається

складанням стовпців E і F. У стовпці H знаходимо саме ту комбінацію стовпців A, B, C, і D, яка найближче знаходиться до шуканого значення числу 105.

Розглянемо приклад застосування запропонованої методики. Для цього використовуємо дані про процес, описаний в роботі [6]. Відзначимо, що всі використані нами дані для демонстрації процесу обчислень умовні. Відповідно до вимог регресійного аналізу всі дані моделювали нормально розподіленими випадковими величинами у вигляді $N(\text{Pr}, 0,13\text{Pr})$, похибку вимірювань моделювали випадковими числами, розподіленими за законом $N(0,1)$. У табл. 7 наведено середні значення параметрів і їх межі, які співпадають з довірчими інтервалами, визначеними за типовою методикою.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	20	4	10	2	A*B	C*D	E+F	G-105
2	19	3,8	9,5	1,9	72,2	18,05	90,25	-14,75
3	19,1	3,82	9,55	1,91	72,962	18,2405	91,2025	-13,7975
4	19,2	3,84	9,6	1,92	73,728	18,432	92,16	-12,84
5	19,3	3,86	9,65	1,93	74,498	18,6245	93,1225	-11,8775
6	19,4	3,88	9,7	1,94	75,272	18,818	94,09	-10,91
7	19,5	3,9	9,75	1,95	76,05	19,0125	95,0625	-9,9375
8	19,6	3,92	9,8	1,96	76,832	19,208	96,04	-8,96
9	19,7	3,94	9,85	1,97	77,618	19,4045	97,0225	-7,9775
10	19,8	3,96	9,9	1,98	78,408	19,602	98,01	-6,99
11	19,9	3,98	9,95	1,99	79,202	19,8005	99,0025	-5,9975
12	20	4	10	2	80	20	100	-5
13	20,1	4,02	10,05	2,01	80,802	20,2005	101,0025	-3,9975
14	20,2	4,04	10,1	2,02	81,608	20,402	102,01	-2,99
15	20,3	4,06	10,15	2,03	82,418	20,6045	103,0225	-1,9775
16	20,4	4,08	10,2	2,04	83,232	20,808	104,04	-0,96
17	20,5	4,1	10,25	2,05	84,05	21,0125	105,0625	0,0625
18	20,6	4,12	10,3	2,06	84,872	21,218	106,09	1,09
19	20,7	4,14	10,35	2,07	85,698	21,4245	107,1225	2,1225
20	20,8	4,16	10,4	2,08	86,528	21,632	108,16	3,16
21	20,9	4,18	10,45	2,09	87,362	21,8405	109,2025	4,2025
22	21	4,2	10,5	2,1	88,2	22,05	110,25	5,25

Рис. 3. Результати пошуку розв'язання оберненої задачі пошуковим методом

Таблиця 7

Межі зміни розрахункових параметрів процесу, який моделюють

Параметри, Pг	Символ, розмірність	Значення		
		нижнє	середнє	верхнє
Середній коефіцієнт масовіддачі	β , $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$	0,682	0,7	0,718
Витрати продукту	M_{np} , $\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$	5,845	6	6,155
Коефіцієнт дифузії олії	D , $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$	1,286	1,32	1,354
Різниця концентрацій	ΔC , $\text{кг} \cdot \text{см}^{-3}$	0,351	0,36	0,369
Розмір частинки, яку піддають екстрагуванню	d , м	0,029	0,03	0,031
Густина масового потоку	ρ , $\text{кг} \cdot \text{м}^3$	0,828	0,85	0,872
В'язкість потоку	μ , $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$	17,536	18	18,464
Витрати розчинника	$M_{роз}$, $\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$	1,461	1,5	1,539
Теплота пароутворення	r , $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$	2,630	2,7	2,770
Потужність мікрохвильового поля	N , $\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$	0,594	0,61	0,626

Модель вимірювань, прийняту далі, представимо у вигляді:

$$Sh_i = c \cdot Sc_i^o \cdot \zeta_i^\pi \cdot Bu_i^\sigma + \omega_i. \quad (27)$$

В умові (27) прийнято, що ω_i – похибка вимірювань.

В результаті лінеаризації умови (27) отримана наступна регресійна модель:

$$\ln Sh = 1,09 + 0,28 \ln Sc + 0,66 \ln \zeta + 0,73 \ln Bu. \quad (28)$$

Чисельні значення коефіцієнтів отриманої моделі прийняті як початкові для процесу, описаного

умовами (25–26). В остаточному вигляді модель була отримана у такому вигляді:

$$Sh = 0,006 \cdot Sc^{0,25} \cdot \zeta^{0,62} \cdot Bu^{0,72}. \quad (29)$$

Відмінність параметрів в моделях (28) і (29) підтверджує зроблений в роботі [4] висновок про зсув оцінок лінеаризованої моделі (28) по відношенню до оцінок, отриманих згідно з мультиплікативною моделлю (29). Зв'язки між параметрами процесу і критеріями подібності показані на рис.4.

Рис. 4. Кількісні значення параметрів і критеріїв подібності, необхідні для вирішення прямого завдання

Кількісні значення параметрів процесу показано в третьому ряду цього рисунку. У другому ряду приведені значення критерію Шмідта (Sc), безрозмірного параметра (ζ), критерію Бурдо (Bu). Ці значення визначено за умовами (11–13).

Величину критерію Шервуда (Sh) визначено згідно з рівнянням (29). Вона дорівнює величині $Sh = 0,015$, ця ж величина, безпосередньо визначена за умовою (9), дорівнює величин $Sh = 0,016$. Таким

чином, в цьому випадку похибка апроксимації дорівнює 6%.

Розв'язання оберненої задачі розглянемо для таких умов. Будемо визначати такі значення параметрів процесу, які можуть забезпечити отримання величини $Sh = 0,020$. Результат застосування методики, яка запропонована в даній роботі і заснована на теоретичних засадах, викладених в роботі [7], представлений на рис. 5.

Рис. 5. Кількісні значення параметрів і критеріїв подібності, необхідні для вирішення зворотного завдання

Якщо рис. 4 слід читати від низу до верху, то рис. 5 слід читати зверху до низу. Для забезпечення величини $Sh = 0,019$, величина, обчислена за умовою (29), необхідні частинні значення критеріїв подібності показані в другому ряду, параметри процесу, що

забезпечують виконання цих критеріїв, показані в третьому ряду. Досягнута похибка дорівнює 5%.

Обчислена за умовою (10) величина $Sh = 0,014$. Таку різницю обумовлено статистичною похибкою вхідних даних, яка дорівнює 30%. Це підтверджує висновок, зроблений авторами в роботі [1] про не-

обхідність розв'язання такого роду задач з використанням методів інтервальних обчислень. Запропонований в даному повідомленні підхід може бути виправданим ще і тому, що збільшення кількості дослідів при фізичному моделюванні процесів і систем може стати дуже витратним процесом.

Висновки

1. Визначено поняття систем, які можна фізично реалізувати, як таких систем, що представлені сукупністю фізичних елементів, структурно пов'язаних між собою, і які взаємодіють із зовнішнім середовищем. Для їх дослідження запропоновано використання критеріальних рівнянь, складених на основі Пі – теореми теорії подібності.

2. Показано, що виходячи з вимог теорії подібності, ці рівняння співпадають з функцією Кобба – Дугласа.

3. Сформульовану пряму та обернену задачу визначення параметрів критеріальних рівнянь.

4. Пряма задача визначення параметрів критеріальних рівнянь співпадає з задачею ідентифікації

функції Кобба – Дугласа. В нашому випадку функцією та аргументами слугують відповідні безрозмірні величини – критерії подібності. Для розв'язання прямої задачі необхідно за даними експерименту з фізичною моделлю технічної системи визначити чисельні параметри цієї функції подібності. Для розв'язання цієї задачі використано алгоритм Марквардта. Пряма задача може бути використана в процесі аналізу технічної системи.

5. Обернену задачу визначення параметрів критеріальних рівнянь можна розглядати як задачу синтезу технічної системи. Для її розв'язання запропоновано двох етапну процедуру. На першому етапі визначають необхідні значення критеріїв – аргументів, на другому визначають безпосередньо значення фізичних параметрів системи, необхідних для забезпечення чисельної величини обраного критерію подібності.

6. Для розв'язання оберненої задачі використано метод дослідження простору параметрів.

7. Наведено чисельний приклад застосування викладеної методики.

Список літератури

1. Дубницький В.Ю. Вычисление индикаторов подобия и численное интегрирование критериев подобия, интервально определённых в системе центр – радиус / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобылин, О.А. Кобылин // Сучасні інформаційні системи. – 2019. – Том 3. – № 3. – С. 55-62.
2. Бриджмен П. Анализ размерностей / П. Бриджмен. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 148 с.
3. Веников В.А. Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики) / В.А. Веников, Г.В. Веников. – М.: Высшая школа, 1984. – 439 с.
4. Дубницький В.Ю. Нелинейное оценивание параметров производственной функции Кобба-Дугласа / В.Ю. Дубницький, А.А. Савченко // Системи обробки інформації. – 2009. – № 2(76). – С. 109-112.
5. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Лётова. – Москва: Высшая школа, 2005. – 544 с.
6. Власенко В.В. Теорія подібності як спосіб моделювання екстрагування під впливом мікрохвильового поля / В.В. Власенко, В.М. Бандура, Л.М. Коляновська // Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. – 2015. – Том № 1(89). – С. 83-87.
7. Соболев И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников. – Москва: Наука, 2006. – 206 с.
8. Дубницький В.Ю. Решение обратной задачи интервального анализа поисковым методом / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобылин // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. – 2014. – № 1131. – С. 54-72.
9. Дубницький В.Ю. Решение прямой и обратной задачи для системы линейных алгебраических уравнений с интервально заданными характеристиками / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобылин // Системи обробки інформації. – № 6(122). – С. 3-8.
10. Дубницький В.Ю. Прямая и обратная задача проектирования технических систем с исходными данными, имеющими неопределенность типа В / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобылин, А.Д. Тевяшев // Системи обробки інформації. – 2015. – № 5(130). – С. 85-92.
11. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый. – Новосибирск: Издательство “XYZ”, 2010. – 601 с.

References

1. Dubnitskiy, V.Yu., Kobylin, A.M. and Kobylin, O.A. (2019), “Vychislenie indikatorov podobija i chislennoe integrirovanie kriteriev podobija, interval'no opredeljonnyh v sisteme centr – radius” [Derivation of the similarity indicators and numerical integration of the similarity criteria, which are interval-based in system center-radius], *Advanced Information Systems*, Vol. 3, No. 3. pp. 55-62.
2. Bridzhmen, P. (2001), “Analiz razmernostej” [Dimensional Analysis], SRC “Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika”, Izhevsk, 148 p.

3. Venikov, V.A. and Venikov, G.V. (1984), “*Teoriya podobija i modelirovanie (primeritel'no k zadacham jelektroenergetiki)*” [The theory of similarity and modeling (applied to the problems of electric power industry)], Vysshaja shkola, Moscow, 439 p.
4. Dubnitsky, V.Yu. and Savchenko, A.A. (2009), “Nelinejnoe ocenivanie parametrov proizvodstvennoj funkicii Kobb-Duglasa” [Non-Linear Evaluation Of Cobb-Douglas Production Function Parameters], *Information Processing Systems*, No. 2(76), pp. 109-112.
5. Panteleev, A.V. and Ljotova, T.A. (2005), “*Metody optimizacii v primerah i zadachah*” [Optimization methods in examples and tasks], Vysshaja shkola, Moscow, 544 p.
6. Vlasenko, V., Bandura, V. and Kolyanovska, L. (2015), “Teoriia podobnosti yak sposib modeliuvannia ekstrakciuvannia pid vplyvom mikrokhvylovoho polia” [Similarity Theory As Way Of Modeling Extraction Process Under Microwave Field], *Collection of Scientific Papers of Vinnytsia National Agrarian University, series Technical Sciences*, No. 1 (89), Vol. 1, pp.83-87.
7. Sobol', I.M. and Statnikov, R.B. (2006), “*Vybor optimal'nykh parametrov v zadachah so mnogimi kriterijami*” [The choice of optimal parameters in problems with many criteria], Science, Moscow, 206 p.
8. Dubnitskiy, V.Yu. and Kobylin, A.M. (2014), “Reshenie obratnoj zadachi interval'nogo analiza poiskovym metodom” [Solving the inverse problem of interval analysis by the search method], *Bulletin of the Karazin Kharkiv National University*, No. 1131, pp. 54-72.
9. Dubnitskiy, V.Yu. and Kobylin, A.M. (2014), “Reshenie prjamoj i obratnoj zadachi dlja sistemy linejnykh algebraicheskikh uravnenij s interval'no zadannymi harakteristikami” [Solution of direct and inverse problem for a system of linear algebraic equations with interval-given characteristics], *Information Processing Systems*, No. 6(122), pp. 3-8.
10. Dubnitskiy, V.Yu., Kobylin, A.M. and Teviashev, A.D. (2015), “Priamaia y obratnaia zadacha proektyrovannia tekhnicheskikh sistem s yskhodnymi dannymi, ymeiushchimi neopredelennost tipa B” [Direct and inverse design problem of technical systems with initial data having B type uncertainty], *Information Processing Systems*, No. 5(130), pp. 85-92.
11. Shary, S.P. (2010), “*Konechnomernyj interval'nyj analiz*” [Finite-dimensional interval analysis], Publishing house XYZ, Novosibirsk, 601 p.

Надійшла до редколегії 14.02.2020

Схвалена до друку 10.03.2020

Відомості про авторів:**Дубницький Валерій Юрійович**

кандидат технічних наук старший науковий співробітник
старший науковий співробітник
Харківського навчально-наукового інституту
Державного вищого навчального закладу
“Університет банківської справи”,
Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0003-1924-4104>

Кобилін Анатолій Михайлович

кандидат технічних наук доцент
доцент Харківського навчально-наукового інституту
Державного вищого навчального закладу
“Університет банківської справи”,
Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0002-8083-0762>

Кобилін Олег Анатолійович

кандидат технічних наук доцент
завідувач кафедри Харківського національного
університету радіоелектроніки,
Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0003-0834-0475>

Information about authors:**Valeriy Dubnitskiy**

Candidate of Technical Sciences Senior Research
Senior Research Associate
of Kharkiv Educational
Scientific Institute SHEI
“University of Banking” Kharkov,
Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0003-1924-4104>

Anatoliy Kobylin

Candidate of Technical Sciences Associate Professor
Senior Lecturer of Kharkiv Educational
Scientific Institute SHEI
“University of Banking” Kharkov,
Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0002-8083-0762>

Oleg Kobylin

Candidate of Technical Sciences Associate Professor
Head of Department of Kharkiv National
University of Radio Electronics,
Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0003-0834-0475>

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРИТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ПИ – ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

В.Ю. Дубницький, А.М. Кобылин, О.А. Кобылин

Определено понятие систем, которые можно физически реализовать, как таких систем, которые можно представить в виде совокупности физических элементов, структурно связанных между собой и взаимодействующих с внешней средой. Для их исследования предложено использование критериальных уравнений, составленных на основе ПИ – теоремы теории подобия.

Показано, что исходя из требований теории подобия, эти уравнения совпадают с функцией Кобба – Дугласа. Сформулированы прямая и обратная задачи определения параметров критериальных уравнений. Прямая задача определения параметров критериальных уравнений совпадает с задачей идентификации функции Кобба – Дугласа. В нашем случае функцией и аргументами служат соответствующие безразмерные величины – критерии подобия. Для решения прямой задачи необходимо по данным эксперимента с физической моделью технической системы определить численные параметры этой функции подобия. Для решения этой задачи использован алгоритм Марквардта. Прямая задача может быть использована в процессе анализа технической системы. Обратную задачу определения параметров критериальных уравнений можно рассматривать как задачу синтеза технической системы. Для ее решения предложена двухэтапная процедура. На первом этапе определяют необходимые значения критериев – аргументов, на втором определяют непосредственно значения физических параметров системы, необходимых для обеспечения численной величины избранного критерия подобия. Для решения обратной задачи использован метод исследования пространства параметров. Приведен численный пример применения изложенной методики.

Ключевые слова: теория подобия, критерии подобия, Пи – теорема теории подобия, метод Марквардта, метод исследования пространства параметров.

FORWARD AND BACKWARD TASK OF PARAMETER DEFINITION OF CRITERION EQUATIONS, OBTAINED ON THE BASE OF THE PI-THEOREM OF SIMILARITY THEORY

V. Dubnitskiy, A. Kobylin, O. Kobylin

In this paper we define such systems that can be physically implemented as a set of physical elements that are structurally connected between each other and interacting with external environment. It is proposed to use the criterion equations based on Pi-Theorem of the similarity theory for studying such systems.

We show that according to the similarity theory these equations coincide with Cobbs-Douglas production function. The direct and backward tasks for determining the parameters of criterion equations are formulated. The direct task for determining the parameters of criterion equations coincide with the task of identification of the Cobbs-Douglas production function. In our case the function and the arguments are the respective dimensionless quantities which are the similarity criterions. In order to solve the direct task, one should determine the numerical parameters of the similarity function based on the data of experiment with the physical model of the technical system. We use the Marquardt algorithm for solving this task. The direct task can be used while analysing the technical system. The backward task of determining the parameters of the criterion equations can be considered as a task of synthesis of the technical system. In order to solve this task, we propose a two-stage procedure. On the first stage the necessary values of criterions, i.e. the arguments are determined. On the second stage we determine directly the values of physical parameters of the system, that are necessary for achieving the numerical value of the chosen similarity criterion. For solving the backward task the method of studying the parameter space is applied. We provide the numerical example of applying the proposed methods.

Keywords: similarity theory, similarity criterions, Pi-Theorem of the similarity theory, Marquardt method, the method of studying the parameter space.