С.В. Гадецька¹, В.Ю. Дубницький², Ю.І. Кушнерук³, О.І. Ходирев², Ю.І. Шевяков³

¹ Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків

² Навчально-науковий інститут “Каразінський банківський інститут” Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, Харків

³ Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

СПЕЦІАЛІЗОВАНИЙ ПРОГРАМНИЙ КАЛЬКУЛЯТОР ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАМБЕРТА $W_0(x)$ І СПОРІДНЕНИХ З НЕЮ ФУНКЦІЙ

Запропоновано спеціалізований програмний калькулятор, призначений для обчислення значень функції Ламберта $W_0(x)$ і споріднених з нею функцій. Описана його програмна реалізація і наведено приклади обчислень. Калькулятор надає обчислювати значення верхньої гілки функції Ламберта, величину обернену до величини функції Ламберта, логарифм функції Ламберта, експоненту, показник ступеня якої містить функції Ламберта, значення першої і другої похідних, значення узагальненого логарифма, узагальненого тангенса, узагальненого котангенса, узагальненого синуса, узагальненого косинуса, гіперболічний узагальнений тангенс, гіперболічний узагальнений котангенс, гіперболічний узагальнений синус, гіперболічний узагальнений косинус. Калькулятор дозволяє обчислювати значення двох найбільш поширених видів визначених інтегралів, підінтегральна функція яких містить функцію Ламберта. Проведено порівняння різних засобів обчислення значень функції Ламберта і рекомендовані області їх застосування.

Ключові слова: спеціалізований програмний калькулятор, функція Ламберта, функції, споріднені функції Ламберта, обернення ряду, інтегрування обернених функцій.

Вступ

Постановка проблеми. Німецький математик, механік, оптик і філософ Йоганн-Генріх Ламберт (1728–1777) розглянув властивості розв’язання рівняння вигляду:

$$w(x) \cdot \exp(w(x)) = x. \quad (1)$$

З цієї рівності виходить, що функція Ламберта, визначена як розв’язання функціонального рівняння вигляду (1) і є функцією, зворотною до функції $x = w \cdot \exp(w)$. Тобто $W(x) = U^{-1}(x)$, де $U(x) = x \cdot \exp(x)$. У сучасній науковій літературі інтерес до властивостей цієї функції оновився після робіт [1–2]. Виявилось, що властивості цієї функції можуть бути корисними при розв’язанні деяких видів диференціальних рівнянь. У роботі [3] наведено приклади застосування функції Ламберта для розв’язання деяких видів рівнянь, наведених в добре відомому довіднику [4]. Наприклад, для рівняння вигляду [4, № 1.217]:

$$(y - x^2) \frac{dy}{dx} = x \quad (2)$$

наведено розв’язок у вигляді функції:

$$x^2 = y - \frac{1}{2} C \exp(-2y). \quad (3)$$

Використання функції Ламберта дає можливість отримати розв’язок в зручнішому для подальших досліджень вигляді:

$$y = \frac{1}{2} w(C \exp(-2x^2)) + x^2 + \frac{1}{2}. \quad (4)$$

У виразах (3), (4) величина C – довільна стала.

Детально властивості функції Ламберта розглянуті в роботі [5]. У цій же роботі наведено приклади застосування функції Ламберта для розв’язання різноманітних фізичних задач. У роботі [6] наведено приклад застосування функції Ламберта при розробці методики оцінки необхідної щільності радіовузлів в мережах зв’язку. Прийmemo, що ρ_s – щільність радіопередавачів в мережі, R^2 – середня дальність радіозв’язку, γ – показник впливу замирання сигналу на ймовірність відсутності N сусідніх радіовузлів; P_{cb} – вірогідність зв’язності мережі. Ці змінні зв’язані рівністю:

$$\rho_s \exp(-\rho_s \pi R^2 \gamma) = -\frac{\ln P_{cb}}{S}. \quad (5)$$

Якщо прийняти, що $y = \rho_s$, $b = -\pi R^2 \gamma$, $a = (-\ln P_{cb})/S$, отримаємо, що розв’язком рівняння (5) буде вираз вигляду:

$$y = \frac{w(ab)}{b}; \quad b \neq 0. \quad (6)$$

З наведеного прикладу видно, що обчислення значень функції Ламберта може бути самостійним науковим завданням, яке має важливе прикладне значення.

Розробка методів обчислення значень функцій на комп'ютерах, або, як казали раніше, ЕОМ (електронних обчислювальних машинах) може бути віднесена до специфічного розділу обчислювальної математики. Його цілі, завдання і основні методи розглянуті в роботах [7–10]. Обчислення значень функції Ламберта включено до складу програмних продуктів, таких як Maple, MATLAB, DERIVE. У системі DERIVE [13] для обчислення значень функції Ламберта слід використовувати команди NEWTONS або NSOLVE. Для використання цих команд слід вказати межі інтервалу, в якому може бути нульове наближення розв'язку і кількість виконуваних ітерацій, або просто значення початкового наближення. Важливість правильного вибору початкового наближення відмічена спеціально в роботі

[14, С.190]: “Бажано якомога точніше указувати початкові наближення при розв'язанні нелінійних рівнянь”.

У системі MATLAB команда `lambertw(k,x)` обчислює значення k -ї гілки функції Ламберта у вибраній точці x . Зміст поняття гілки функції Ламберта буде пояснено далі. Використані в цих програмних продуктах алгоритми закриті для користувача і оцінка їх якості стає самостійною науковою задачею [11]. На підтвердження цього розглянемо наведені в роботі [12] приклади розв'язання алгебраїчних рівнянь програмою, запропонованою в цій роботі [12, С.84] і корені, отримані з використанням системи DERIVE. Результати цього порівняння наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Порівняння коренів алгебраїчних рівнянь, отриманих різними програмними системами

Рівняння	Корені рівняння		Абсолютна похибка розв'язку	
	Отримані програмою [12]	Отримані програмою DERIVE	Отриманого програмою [12]	Отриманого програмою DERIVE
$x^3 - 65x^2 + 1087x - 1023 = 0$	33	33	0	0
	31	31	0	0
	1	1	0	0
$x^3 - 1519x^2 + 769118x - 1,2980924 \cdot 10^8 = 0$	508	508	0	0
	506	506	0	0
	505	505	0	0
$x^3 - 3221x^2 + 3453210x - 1,23321 \cdot 10^9 = 0$	1000	1189,695119	$-1 \cdot 10^6$	-0,009873
	1110	1015,65244-70,8986416j	$-111 \cdot 10^3$	0,08135+0,25611j
	1111	1015,65244+70,8986416j	$-1111 \cdot 10^3$	0,08135-0,25611j

У табл. 1 прийнято, що $j = \sqrt{-1}$. З результатів, наведених в цій таблиці, видно, що корені можуть повністю співпадати (приклади 1, 2) або не співпадати (приклад 3). Пошук причин цього факту виходить за межі даної статті. Цей приклад наочно показує, що для підвищення надійності отриманих результатів необхідно застосування програм, текст яких доступний користувачеві, або використовувати одночасно різні програмні системи.

Слід зазначити, що вимога використання тільки ліцензованих програмних продуктів при виконанні наукових робіт також служить стимулом до розробки спеціалізованих програмних калькуляторів для обчислення значень функції Ламберта з використанням більш доступних програмних засобів, наприклад таких, як EXCEL.

Аналіз літератури. Основні відомості про властивості функції Ламберта приведені в роботі [5]. Далі вони викладені за умовчанням, тобто без додаткових посилань. Випадки, коли автори використовують властивості функції Ламберта, не згадані в

роботі [5], обумовлені відповідними посиланнями. Графік функції $w(x)$ представлений на рис. 1.

Рис. 1. Графік функції Ламберта $w(x)$

Точка $A(-1/e; -1)$ поділяє графік на дві гілки: верхню – $w_0(x)$ і нижню – $w_{-1}(x)$. В рамках даної роботи розглядатимемо тільки верхню частину, тому в подальшому викладі нижній індекс буде опущений.

Деякі значення цієї функції приведені в табл. 2.

Таблиця 2
Чисельні значення функції $w(x)$

x	$w(x)$	x	$w(x)$
0	0	20	2,205
1	0,5671	30	2,4892
2	0,8526	40	2,6968
3	1,0499	50	2,8609
4	1,2022	60	2,9968
5	1,3267	70	3,1129
6	1,4324	80	3,2144
7	1,5243	90	3,3045
8	1,6058	100	3,3856
9	1,679		
10	1,7455		

Основну властивість функції Ламберта видно з чисельного прикладу. Виходячи з визначення функції $w(x)$, наведеного в співвідношенні (1), отримаємо, що для $x = 5$ і $w = 1,326725$ маємо $1,326725e^{1,326725} = 5$. У роботі [15] приведена таблиця значень функції Ламберта в розширеному, в порівнянні з роботою [5], вигляді.

Створення математичних таблиць різних функцій до цих пір вважається настільки важливим завданням, що в Універсальній десятичній класифікації (УДК) вона відмічена індексом УДК 519.66. Зараз, у зв'язку з розповсюдженням комп'ютерів, на перше місце вийшли задачі створення алгоритмів і програм для обчислення цих функцій [16–18].

Далі розглянуто особливості обчислення функції Ламберта і пов'язаних з нею функцій, які описані в роботі [5], а також функцій, запропонованих авторами даної роботи.

Для обчислення значень функції Ламберта в роботі [5] запропоновано три способи.

1. Розв'язання трансцендентного рівняння (1).

2. Розв'язання у вигляді ряду [5, ф. 1.4.5]:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} x^n; \quad (7)$$

у даній роботі використано ряд для $n = 6$ [5, ф. 1.4.1]:

$$w(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \frac{54}{5}x^6. \quad (8)$$

В роботі [16] наведено ряд для обчислення величини $w(x)$, який після нескладних перетворень співпадає з рядом (7).

3. В роботах [5, ф. 1.4.9] запропонована інтерполяційна формула вигляду:

$$w(x) = \begin{cases} 0,665[1 + 0,0195 \ln(x+1)] \ln(x+1) + 0,04; & 0 \leq x \leq 500, \\ \ln(x-4) - \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right) \ln \ln x; & x > 500. \end{cases} \quad (9)$$

В роботі [5, ф. 1.4.6] запропонована інтерполяційна формула вигляду:

$$w(x) = A + B + C + D + E; \quad (10)$$

$$A = \ln x - \ln \ln x; \quad (11)$$

$$B = \frac{\ln \ln x}{\ln x}; \quad (12)$$

$$C = \frac{\ln \ln x (\ln x - 2)}{2(\ln x)^2}; \quad (13)$$

$$D = \frac{\ln \ln x [2(\ln \ln x)^2 - 9 \ln \ln x + 6]}{6(\ln x)^3}; \quad (14)$$

$$E = \frac{\ln \ln x [3(\ln \ln x)^3 - 22(\ln \ln x)^2 + 36 \ln \ln x - 12]}{12(\ln x)^4}. \quad (15)$$

Для порівняння виразів (9) і (10–15) розглянемо приклад, який наведено в табл. 3.

Таблиця 3

Визначення початкового наближення для обчислення значень функції Ламберта

Параметри розрахунку	Спосіб обчислень		
	Таблиця 2	Формула (9)	Формули (10–15)
x	5	5	5
w	1,3267	1,3331	1,2732

Значення величини $\bar{w}$ отримане усереднюванням результатів, наведених в двох останніх стовп-

чиках табл. 3, дорівнює величині $\bar{w} = 1,30331$. Таким чином, при виборі початкового наближення рекоме-

ндується використовувати обидва способи інтерполяції.

Представлення функції Ламберта у вигляді ланцюгових дробів приведене в роботі [5], і тому в даній роботі не розглянуто.

Для обчислення значень логарифма функції Ламберта в роботі [5, ф. 1.4.2] запропоновано два способи.

1. Розв'язок у вигляді інтерполяційної формули:

$$\ln w(x) = \ln x - w(x). \quad (16)$$

2. Розв'язок у вигляді ряду:

$$\ln w(x) = \ln x - x + x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{8}{3}x^4 - \frac{125}{24}x^5 + \frac{54}{5}x^6. \quad (17)$$

Для обчислення значень величини, оберненої до значень функції Ламберта, в роботі [5, ф. 1.4.3], запропоновано ряд вигляду:

$$\frac{1}{w(x)} = \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{9}{8}x^3 + \frac{32}{15}x^4 - \frac{625}{144}x^5 + \frac{324}{35}x^6. \quad (18)$$

Для обчислення значень експоненти функції Ламберта в роботі [5, ф. 1.4.4] запропоновано два способи.

1. Розв'язок у вигляді інтерполяційної формули:

$$\exp w = \frac{x}{w}. \quad (19)$$

2. Розв'язок у вигляді ряду:

$$\exp w = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{8}x^4 + \frac{32}{15}x^5 - \frac{625}{144}x^6. \quad (20)$$

Співвідношення (1) можна представити у вигляді степеневому ряду:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \omega^i = \Psi(\omega). \quad (21)$$

Ряд, заданий формулою (7), можна представити у вигляді:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k. \quad (22)$$

При визначенні коефіцієнтів в рядах (17), (18), (20) користувалися розв'язанням задачі про обернення ряду. Задачу визначення коефіцієнтів ряду (22) по відомому ряду (21) називають задачею обернення ряду. Ця задача не належить до достатньо відомих задач в теорії рядів, тому розглянемо її докладніше. Теоретичні основи розв'язання задачі обернення ряду викладено в роботі [20, С. 505]. В роботі [21] наведено розв'язання цієї задачі в загальному вигляді. Відповідно до цієї роботи в нашому

випадку коефіцієнти b_k визначали із співвідношення:

$$b_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} \left(\frac{1}{\Psi(\omega)} \right)^k \right]_{\omega=0}. \quad (23)$$

В роботі [23, С. 14] наведено в явному виді вирази для визначення перших п'яти коефіцієнтів оберненого ряду.

При роботі з рядами, наведеними в даній роботі, автори зустріли друкарську помилку в добре відомому і заслужено популярному довідковому виданні [21, С. 93], на яку, на їх думку, слід звернути увагу читачів. У цій роботі наведено наступний вираз:

$$\begin{aligned} \ln x &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (x+1)^{2n+1}} = \\ &= 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$x > 0.$

У роботах [22, С. 212; 23, ф. 1.512.2] наведено вираз:

$$\begin{aligned} \ln x &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (x+1)^{2n-1}} = \\ &= 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$x > 0.$

Порівняння правих і лівих частин рівності (24) і (25) підтверджує наявність друкарської помилки в показниках степені Вірною слід вважати умову (25).

У роботі [5, ф. 1.3.3, ф. 1.3.5, ф. 1.3.6] наведено вирази для визначення похідних функції Ламберта. В рамках даної роботи, виходячи з потреб задач механіки, визначено дві перші похідні:

$$\begin{aligned} \frac{d^n w}{dx^n} &= \frac{\exp(-nw) p_n(w)}{(1+w)^{2n-1}} \quad n \geq 1 \\ p_1(w) &= 1, \quad p_2(w) = -(w+2), \end{aligned} \quad (26)$$

отже:

$$\frac{dw}{dx} = \left[e^w (1+w) \right]^{-1} = \frac{w}{x(1+w)}; \quad (27)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{e^{-2w} (w+2)}{(1+w)^3}. \quad (28)$$

Якщо обчислення похідних обернених функцій розглянуто у всіх курсах математичного аналізу, то протилежна операція – інтегрування оберненої функції загального вигляду – була в доступній авторам літературі розглянута вже практично у наш час. У роботі [5, ф. 1.5.1] з посиланням на роботу [25] для інтеграла від зворотної функції приведено співвідношення вигляду:

$$\int_x f(x)dx = xf(x) - \int_{f(x)} g(y)dy. \quad (29)$$

Ілюстрація геометричного змісту інтеграла від оберненої функції показана на рис. 2.

Рис. 2. Геометричний зміст інтеграла від зворотної функції

Співвідношення (29) може бути отримане як наслідок наступних перетворень (30):

$$\int_a^b f^{-1}(x)dx = S(ABDC) = S(OEFB) - S(OEDC) - S(EFBD) = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(y)dy. \quad (30)$$

У даній роботі до складу спеціалізованого програмного калькулятора включено обчислення найбільш необхідних, на думку авторів роботи [5], інтегралів $I1$ [5, ф. 1.5.2] і $I2$ [5, ф. 1.5.3]:

$$I1 = \int w(x)dx = x \left[w(x) - 1 + \frac{1}{w(x)} \right]; \quad (31)$$

$$I2 = \int xw(x)dx = \frac{x^2}{8} \left[4w(x) - 2 + \frac{2}{w(x)} - \frac{1}{(w(x))^2} \right]. \quad (32)$$

У роботі [5] згадані функції, що отримали назву функцій, споріднених функції Ламберта. Необхідні відомості про них приведені в роботах [25–27] і будуть викладені при описі пропонованого калькулятора.

Мета роботи. Розробка спеціалізованого програмного калькулятора для обчислення значень функцій Ламберта, споріднених і пов'язаних з нею функцій.

Процес розв'язання поставленої задачі складається з наступних етапів:

- порівняння засобів обчислення функції Ламберта;
- складання переліку функцій, включених в меню калькулятора;
- визначення значень функцій, споріднених функції Ламберта;
- визначення значень функцій, пов'язаних з функцією Ламберта;
- розробка спеціалізованого програмного калькулятора.

Виклад основного матеріалу

Порівняння засобів обчислення функцій Ламберта. У роботі [5] наведено два способи обчислення значень функції Ламберта. Перший заснований на її визначенні (1), другий – на використанні ряду виду (8). Правила визначення відносних похибок обраних методів приведено в табл. 4.

Таблиця 4

Правила визначення відносної похибки обчислення значень функції $W(x)$

Символ величини відносної похибки	Спосіб визначення величини відносної похибки	Границі змінної x
eps1	$w(x, 8) / w(x)$	$1 \leq x \leq 10$
eps2	$w(x, 8) / w(x)$	$0,1 \leq x \leq 10$
eps3	$w(x, 8) / w(x)$	$0,01 \leq x \leq 0,1$

У цій таблиці в чисельнику індекс після коми вказує номер формули в даній роботі, використаний для обчислення відповідної величини, за умови, що:

$$W(x) = U^{-1}(x) \quad U(x) = x \cdot \exp(x). \quad (33)$$

Графіки зміни відносної похибки визначення величини $W(x)$ залежно від обраних границь для змінної x представлено на рис. 3–5.

Рис. 3. Зміна відносної похибки обчислення функції Ламберта $W(x)$ при зміні аргументу в інтервалі $1 \leq x \leq 10$

Рис. 4. Зміна відносної похибки обчислення функції Ламберта $W(x)$ при зміні аргументу в інтервалі $0,1 \leq x \leq 1$

Рис. 5. Зміна відносної похибки обчислення функції Ламберта $W(x)$ при зміні аргументу в інтервалі $0,01 \leq x \leq 0,1$

З наведених графіків виходить, що застосування степеневого ряду для обчислення значень функції

Ламберта має сенс тільки при зміні аргументу на відрізка $0,01 \leq x \leq 0,1$.

Правила для визначення відносної похибки обчислення функції $\exp w$ по інтерполяційній формулі

(19) з використанням степеневого ряду (20) наведені в табл. 5.

Таблиця 5

Правила для визначення відносної погрішності обчислення значень функції $\exp w$

Символ величини відносної погрішності	Спосіб визначення величини відносної погрішності	Інтервал значень змінної
eps4	$w(x, 20) / \exp w$	$1 \leq x \leq 10$
eps5	$w(x, 20) / \exp w$	$0,1 \leq x \leq 10$
eps6	$w(x, 20) / \exp w$	$0,01 \leq x \leq 0,1$

У цій таблиці в чисельнику індекс після коми вказує номер формули в даній роботі, використаний для обчислення відповідної величини.

Графіки зміни відносній погрішності визначення величини $W(x)$ залежно від інтервалу зміни змінної x показані на рис. 6–8.

Рис. 6. Зміна відносної похибки обчислення функції $\exp w$ при зміні аргументу в інтервалі $1 \leq x \leq 10$ Рис. 7. Зміна відносної похибки обчислення функції $\exp w$ при зміні аргументу в інтервалі $0,1 \leq x \leq 0,9$

Рис. 8. Зміна відносної похибки обчислення функції $\exp w$ при зміні аргументу в інтервалі $0,01 \leq x \leq 0,1$

З наведених графіків виходить, що застосування степеневого ряду для обчислення значень функції Ламберта і значень функції $\exp w$, рекомендованого в роботі [5], має сенс тільки при зміні аргументу в інтервалі $0,01 \leq x \leq 0,1$.

Аналогічні результати отримані і для функцій $\ln w$ і $1/w$.

Складання переліку функцій, включених в меню калькулятора. При складанні цього переліку автори керувалися рекомендаціями робіт [5; 25–27]. Визначення функцій приведені в табл. 6.

Розподіл видів функцій, обчислення значень яких включено в калькулятор по використаній літературі, приведено в табл. 7.

Таблиця 6

Функції, які включено до меню калькулятора

Символ функції	Ім'я функції в меню калькулятора	Спосіб обчислення або номер формули	Символ функції	Ім'я функції в меню калькулятора	Спосіб обчислення або номер формули
F1	w	$W(x)=U^{-1}(x),$ $U(x) = x \cdot \exp(x)$	$W(x)=U^{-1}(x),$ $U(x) = x \cdot \exp(x)$	Узагальнений синус	$W(x)=U^{-1}(x),$ $U(x) = w \cdot \sin w$
F2	$1/w$	$1/w$	$1/w$	Узагальнений косинус	$W(x)=U^{-1}(x),$ $U(x) = w \cdot \cos w$
F3	$\ln w$	$\ln w$	$\ln w$	Гіперболічний узагальнений тангенс	$W(x)=U^{-1}(x)$ $U(x) = w \cdot thw$
F4	$\exp w$	$\exp w$	$\exp w$	Гіперболічний узагальнений котангенс	$W(x)=U^{-1}(x)$ $U(x) = w \cdot cthw$
F5	Перша похідна	(27)	(27)	Гіперболічний узагальнений синус	$W(x)=U^{-1}(x)$ $U(x) = w \cdot shw$
F6	Друга похідна	(28)	(28)	Гіперболічний узагальнений косинус	$W(x)=U^{-1}(x)$ $U(x) = w \cdot chw$
F7	Узагальнений логарифм	$W(x)=U^{-1}(x)$ $U(x) = \frac{1}{x} \exp x$	$W(x)=U^{-1}(x)$ $U(x) = \frac{1}{x} \exp x$	Інтеграл I1	(31)
F8	Узагальнений тангенс	$W(x)=U^{-1}(x),$ $U(x) = w \cdot tgw$	$W(x)=U^{-1}(x),$ $U(x) = w \cdot tgw$	Інтеграл I2	(32)
F9	Узагальнений котангенс	$W(x)=U^{-1}(x),$ $U(x) = w \cdot ctgw$	$W(x)=U^{-1}(x),$ $U(x) = w \cdot ctgw$	–	–

Таблиця 7

Розподіл видів функцій по використаній літературі, в яких вони згадані

Символ функції	Використана література
$F1, F6, F15, F16$	[5]
$F7, \dots, F9$	[26–27]
$F10–F16$	Запропоновано авторами

Початкові дані для розрахунку значень функцій, вказаних в табл. 6, вводить користувач калькулятора у вигляді множини значень $X = (x_1, x_2, \dots, x_g \dots x_z)$, $x \leq 1024$. Одночасно користувач обирає величину кроку між сусідніми елементами множини. Ця величина зберігається постійною при всіх подальших обчисленнях. Функції, включені в меню калькулятора, утворюють множину $M = (F1, F2, \dots, FD, \dots, F15)$. Використовуючи поняття декартового добутку [27], множину вхідних значень можна представити так:

$$V = \{(x_g, FD) | x_g \in X, FD \in M\}. \quad (34)$$

Результатом роботи алгоритму буде множина елементів $\omega(g, FI)$, яку також можна представити у вигляді добутку Декарта:

$$M = \{(w_g, FD) | w_g \in W, FD \in M\}. \quad (35)$$

Результатом роботи алгоритму буде елемент $\omega(g, FD) \in M$, чисельне значення якого відповідає розв'язку рівняння вигляду (1) при значенні аргументу, рівного величині x_g для функції вигляду FD , можливий вид якої приведений в табл. 6.

Визначення значень функцій, споріднених функції Ламберта. Відповідно до термінології, прийнятої в роботах [5; 25, 26], в рамках даної роботи спорідненими називатимемо значення функцій, наведених в табл. 6 та обчислених для одного і того ж значення величини x_g :

$$R = \{(w_g, F1), (w_g, F2) \dots (w_g, F17)\}. \quad (36)$$

Визначення значень функцій, пов'язаних з функцією Ламберта. В рамках даної роботи функціями, пов'язаними з функціями Ламберта, називатимемо множину функцій C , визначених співвідношенням (37):

$$C = \{(w_1, FU), (w_2, FU), \dots (w_z, FU)\} \quad (37)$$

$$FU = F1, \dots, F17.$$

Із співвідношення (37) виходить, що функції, пов'язані з функцією Ламберта, – це функції різних аргументів, визначених для однієї і тієї ж функції Ламберта.

Розробка спеціалізованого програмного калькулятора. Засобами VBA в MS Excel розроблений калькулятор, за допомогою якого можна обчислювати як значення x , так і значення w , які зв'язані виразом (1).

На сторінці “Подбор X” представлений модуль для обчислення w і 14 різних функцій $f(w)$ у вказаному діапазоні значень x з вибраним кроком зміни x . Перелік функцій наведений в табл. 6. Задачу розв'язано в середовищі MS Excel з використанням алгоритму підбору параметра, який дозволяє обчислити значення w при заданому значенні x з кількістю вірних десяткових знаків, рівною 6 (при використанні вбудованого в MS Excel механізму підбору параметра досягається точність 3 десяткових знаки). Для всіх функцій на екран виводиться відповідне значення x і w в кожній точці. Лист “Подбор X” має вигляд, показаний на рис. 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Исходные данные					ПУСК	Результаты вычислений		
2	Начальное значение x	Конечное значение x	Шаг изменения x	Функция	Диапазон w		x	w	обобщенный тангенс
3	-0,3	1,0	0,1	обобщенный тангенс	$w > -1$		-0,3	-0,489402	0,260666
4					8		-0,2	-0,259170	0,068715
5							-0,1	-0,111832	0,012559
6							0,0	0,000001	0,000000
7							0,1	0,091276	0,008355
8							0,2	0,168916	0,028807
9							0,3	0,236756	0,057125
10							0,4	0,297167	0,091003
11							0,5	0,351734	0,129085
12							0,6	0,401564	0,170519
13							0,7	0,447470	0,214758
14							0,8	0,490068	0,261439
15							0,9	0,529833	0,310319
16							1,0	0,567143	0,361239

Рис. 9. Вигляд лист “Подбор X” з прикладом обчислення узагальненого тангенса від w при значеннях x , що змінюються від -0,3 до 1 з кроком 0,1

За допомогою кнопки “ПУСК” ініціюється введення початкових даних. На екран послідовно виводяться діалогові вікна, що містять в полі введення

даних значення з попереднього сеансу обробки даних (рис. 10).

Рис. 10. Вид діалогових вікон з даними з попереднього сеансу

При бажанні будь-яке з цих значень можна замінити на нове або підтвердити запропоноване. Вибір функції здійснюється шляхом введення її номера з представленого переліку. Введення даних виконується натисненням кнопки ОК, після чого відбувається

формування таблиці результатів обчислень за допомогою макросу.

Якщо потрібно провести обчислення в одній точці, то достатньо ввести однакові початкове і кінцеве значення (рис. 11).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Исходные данные					ПУСК	Результаты вычислений		
	Начальное значение	Конечное значение	Шаг изменения	Функция			x	w	обобщенный логарифм
2	x	x	x						
3	2,5	2,5	0,0	обобщенный логарифм			2,5	0,958586	-0,040544

Рис. 11. Приклад обчислення функції узагальненого логарифма в одній точці $x=2,5$

Область значень x лежить в межах $-0,367879441171442 \leq x \leq 1$. При спробі ввести значення x , що виходить за область значень, на екран виводиться відповідне повідомлення (рис. 12), і виконання макросу припиняється.

Рис. 12. Повідомлення про помилку при введенні значення x

Графік функції показує, що критичною точкою є значення $w = -1$, у якій x відповідає лівій межі функції. При цьому однакові значення x можна побачити у від’ємній області як нижче за критичну точку, так і вище. Тому при введенні від’ємних значень як початкових даних на екран виводиться додаткове питання про зону обчислень (рис. 13).

Рис. 13. Запит на визначення діапазону обчислень

При цьому результат роботи калькулятора виглядатиме як показано на рис. 14.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Исходные данные					ПУСК	Результаты вычислений		
	Начальное значение	Конечное значение	Шаг изменения	Функция	Диапазон w		x	w	
2	x	x	x						
3	-0,10	-0,01	0,01	w	w < -1		-0,10	-3,577165	
4					1		-0,09	-3,722292	
5							-0,08	-3,882111	
6							-0,07	-4,060574	
7							-0,06	-4,263515	
8							-0,05	-4,499748	
9							-0,04	-4,784217	
10							-0,03	-5,144473	
11							-0,02	-5,642300	
12							-0,01	-6,472759	

Рис. 14. Результат обчислень в діапазоні нижчий за критичну точку

Кількість n перших значущих цифр [28] змінної x визначається по максимальній значущості введених початкових даних (у прикладі – це крок зміни x , що має 1 цифру в дробовій частині числа). Значущість величини результатів обчислення дорівнює

шести.

На листі “Обчислення X по W ” передбачено обчислення функції x на основі w у вказаному діапазоні з вказаним кроком зміни значення. Лист має вигляд, показаний на рис. 15.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Исходные данные			ПУСК			Результаты вычислений		
	Начальное значение	Конечное значение	Шаг изменения				w	x	
2	w	w	w						
3	-2,00	2,00	0,25				-2,00	-0,270671	
4							-1,75	-0,304104	
5							-1,50	-0,334695	
6							-1,25	-0,358131	
7							-1,00	-0,367879	
8							-0,75	-0,354275	
9							-0,50	-0,303265	
10							-0,25	-0,194700	
11							0,00	0,000000	
12							0,25	0,321006	
13							0,50	0,824361	
14							0,75	1,587750	
15							1,00	2,718282	
16							1,25	4,362929	
17							1,50	6,722534	
18							1,75	10,070555	
19							2,00	14,778112	

Рис. 15. Приклад обчислення значення функції $x=w*\exp(w)$ для значень w від -2 до 2 з кроком 0,25

Лист “Інтеграли” дозволяє обчислювати інтеграли в заданих межах, визначуваних значеннями w в точках a і b , зв’язаних функціями $a=w*\exp(w)$ і $b=w*\exp(w)$. При цьому на екран виводяться зна-

чення $w(a)$ і $w(b)$, а також формули обчислення значень інтегралів. Вид листа “Інтеграли” представлений на рис. 16.

	A	B	C	D
1	Пределы интегралов:			ПУСК
2	a:	4,20	4,20	$x=w(a)*\exp(w(a))$
3	b:	5,20	5,20	$x=w(b)*\exp(w(b))$
4	w(a)		1,22893587	
5	w(b)		1,34916946	
6	Интеграл I1		1,290783	$=b*(w(b)-1+1/w(b))-a*(w(a)-1+1/w(a))$
7	Интеграл I2		6,076689	$=(b^2)/8*(4*w(b)-2+2/w(b)-1/w(b)^2)-(a^2)/8*(4*w(a)-2+2/w(a)-1/w(a)^2)$

Рис. 16. Приклад обчислення інтегралів з межами $w(a)$ при $a=4,2$ і $w(b)$ при $b=5,2$

Історико – бібліографічний додаток. Автори даної роботи вважають за доцільне дати короткі відомості про одного з авторів роботи [21], а саме І.Н. Бронштейна (1903–1976). Більш детально вони викладені в роботі [29]. І.Н. Бронштейн був одним з ентузіастів викладення векторного аналізу в технічних вишах. За це отримав гідну подяку від тодішньої влади. Він був заарештований за те, що викладав на векторній мові він утрудняв розуміння матеріалу і тим завдавав шкоди радянському студентству. Ось такі були часи...

Висновки

1. Запропоновано спеціалізований програмний калькулятор, призначений для обчислення значень функції Ламберта $W_0(x)$ і споріднених з нею функцій. Описана його програмна реалізація і наведено приклади обчислень.

2. Калькулятор надає можливість обчислювати значення верхньої гілки функції Ламберта, величину обернену до величини функції Ламберта, логарифм функції Ламберта, експоненту, показник ступеня якої містить функції Ламберта, значення першої і другої похідних, значення узагальненого логарифма, узагальненого тангенса, узагальнений котангенс, узагальненого синуса, узагальненого косинуса, гіперболічний узагальнений тангенс, гіперболічний узагальнений котангенс, гіперболічний узагальнений синус, гіперболічний узагальнений косинус.

3. Калькулятор дозволяє обчислювати значення двох найбільш поширених видів визначених інтегралів, підінтегральна функція яких містить функцію Ламберта. Проведено порівняння різних засобів обчислення значень функції Ламберта і рекомендовані області їх застосування.

Список літератури

1. Corless R.M. On the Lambert W function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E. Hare // Adv. Comput. Math. – 1996. – Vol. 5. – P. 329-359.
2. Valluri S.R. Some applications of the Lambert W function to physics / S.R. Valluri, D.J. Jeffrey, R.M. Corless // Canadian J. Phys. – 2000. – Vol. 78. – P. 823-831.
3. Дубинова И.Д. Точные явные решения некоторых видов дифференциальных уравнений / И.Д. Дубинова // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Том 40, № 8. – С. 1129-1130.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Москва: Наука, 1965. – 807 с.
5. Дубинов А.Е. W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики / А.Е. Дубинов, И.Д. Дубинова, С.К. Сайков. – Саров: ВНИИЭФ, 2006. – 160 с.
6. Методика оцінки щільності радіовузлів в самоорганізованих мережах / В.Г. Сайко, О.Г. Плющ, В.О. Бреславський, Л.М. Грищенко // Телекомунікаційні та інформаційні технології. – 2016. – № 1. – С. 5-10.
7. Алексеев Г.И. Воспроизведение функций средствами цифроаналоговой вычислительной техники / Г.И. Алексеев. – Минск: Наука и техника, 1976. – 224 с.
8. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
10. Цимринг Ш.Е. Специальные функции и определённые интегралы. Алгоритмы. Программы для микрокалькуляторов / Ш.Е. Цимринг. – М.: Радио и связь, 1988. – 272 с.
11. Ніконов О.Я. Оцінка точності обчислень спеціальних функцій при розробці комп'ютерних програм математичного моделювання / О.Я. Ніконов, О.В. Мнушка, В.М. Савченко // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Х.: НТУ "ХПІ". – 2011. – № 17. – С. 115-121.
12. Беланов А.А. Решение алгебраических уравнений методом Лобачевского / А.А. Беланов – Москва: Наука, 1989. – 96 с.
13. Дьяконов В.П. Система компьютерной алгебры DERIVE / В.П. Дьяконов. – Москва: СОЛОН- Р, 2002. – 320 с.
14. Макаров Е. Инженерные расчёты в MATHCAD 15 / Е. Макаров. – СПб.: Питер, 2011. – 400 с.
15. Балістика крапель, які випаровуються при польоті / С.І. Кучеренко, В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський, Л.М. Тіщенко. – Х.: ХНТСТ, 2007. – 304 с.

16. Старицын М.А. Вычисление вещественной W-функции Ламберта W_0 в пределах FP / LINSPEACE / М.А. Старицын, С.В. Яхонтов // Прикладная и дискретная математика. – 2014. – № 3(25). – С. 111-116.
17. Яхонтов С.В. Эффективные по времени и памяти алгоритмические приближения чисел и функций / С.В. Яхонтов, Н.К. Косовский, Т.М. Косовская. – СПб.: СПбГУ, 2012. – 256 с.
18. Карацуба Е.А. Быстрые вычисления трансцендентных функций / Е.А. Карацуба // Проблемы передачи информации. – 1991. – Том 27, Вып. 4. – С. 76-99.
19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II / Г.М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1962. – 807 с.
20. Смирнова Т.Н. Обращение ряда с помощью полиномиального прораба на ЭВМ типа М-20 / Т.Н. Смирнова // Труды Математического института Академии Наук СССР. – 1968. – Том 96. – С. 64-67.
21. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – Москва: Наука, 1981. – 718 с.
22. Попов Б.А. Вычисление функций на ЭВМ / Б.А. Попов, Г.С. Теслер. – Киев: Наукова думка, 1984. – 598 с.
23. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – Москва: Наука, 1963. – 1108 с.
24. Parker F.D. Integrals of inverse functions / F.D. Parker // II Amer. Math. Month. – 1955. – Vol. 62. – No. 6. – P. 439-440.
25. Kalman D. A generalized logarithm for exponential-linear equations / D. Kalman // II Reprint from College Math. Journal. – 2001. – Vol. 32. – No. 1.
26. Markushin V.E. The W_t transcendental function and quantum mechanics applications / V.E. Markushin, R. Rosenfelder, A.W. Schreiber // arXiv: math-ph/0104019v2. – 10 Jan, 2003.
27. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру / Л.А. Калужнин. – Москва: Наука, 1973. – 448 с.
28. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – Москва: Наука, 1966. – 664 с.
29. Александрова Н.В. Из истории векторного исчисления / Н.В. Александрова. – Москва: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2013. – 272 с.

References

1. Corless, R.M., Gonnet, G.H. and Hare, D.E. (1996), On the Lambert W function, *Adv. Comput. Math.*, Vol. 5, pp. 329-359.
2. Valluri, S.R., Jeffrey, D.J. and Corless, R.M. (2000), Some applications of the Lambert W function to physics, *Canadian J. Phys.*, Vol. 78, pp. 823-831.
3. Dubinova, I.D. (2004), “Tochnye javnye resheniya nekotorykh vidov differentsial'nykh uravneniy” [Exact explicit solutions of some types of differential equations], *Differential Equations*, Vol. 40, No. 8, pp. 1129-1130.
4. Kamke, E. (1965), “*Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam*” [*Handbook of ordinary differential equations*], Nauka, Moscow, 807 p.
5. Dubinov, A.E., Dubinova, I.D. and Saikov, S.K. (2006), “W- funkciya Lambert a i ejo primenenie v matematicheskikh zadachah fiziki” [*W-Lambert function and its application in mathematical problems of physics*], VNIIEF, Sarov, 160 p.
6. Saiko, V.H., Plushch, V.O., Breslviskyi, V.O. and Hryshchenko, L.M. (2016) “Metodyka otsinky shchilnosti radiovuzliv v samoorhanizovanykh mrezhakh” [Methods for estimating the density of radio nodes in self-organized networks], *Telecommunication and information technologies*, No. 1, pp. 5-10.
7. Alekseev, G.I. (1976), “Vosproizvedenie funktsii sredstvami cifroanalogovoy vychislitel'noy tehniky” [*Reproduction of functions by means of digital-to-analog computing technology*], Nauka i tehnika, Minsk, 224 p.
8. Lyuk, Yu. (1980), “Spetsial'nyye matematicheskiye funktsii i ikh approksimatsii” [*Special mathematical functions and their approximations*], Mir, Moscow, 608 p.
9. Abramovits, M. and Stigan, I. (1979), “*Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami i tablitsami*” [*Reference for special functions with formulas and tables*], Nauka, Moscow, 832 p.
10. Zimring, Sh.E. (1988), “Spetsial'nyye funktsii i opredelennyye integraly. Algoritmy. Programmy dlya mikrokal'kulyatorov” [*Special functions and definite integrals. Algorithms. Programs for microcalculators*], Radio i svyaz, Moscow, 272 p.
11. Nikonov, O.Ia., Mnushka, O.V. and Savchenko, V.M (2011), “Otsinka tochnosti obchyslen spetsialnykh funktsii pry rozrobtitsi kompiuternykh prohrann matematychnoho modeliuvannia” [Estimation of accuracy of calculations of special functions at development of computer programs of mathematical modeling], *Bulletin of NTU “KhPI”. Thematic issue: Informatics and modeling*, No. 17, pp. 115-121.
12. Belanov, A.A. (1989), “Resheniye algebraicheskikh uravneniy metodom Lobachevskogo” [*Solving algebraic equations by the Lobachevsky method*], Nauka, Moscow, 96 p.
13. Dyakonov, V.P. (2002), “Sistema komp'yuternoy algebrы DERIVE” [*DERIVE computer algebra system*], SOLON-P, Moscow, 320 p.
14. Makarov, E. (2011), “Inzhenernyye raschoty v MATHCAD 15” [*Engineering calculations in MATHCAD 15*], Piter, St. Petersburg, 400 p.
15. Kucherenko, S.I., Olshansky, V.P., Olshansky, S.V. and Tishchenko, L.M. (2007), “Balistyka krapel, yaki vyparovuiut-sia pry poloti” [*Ballistics of drops that evaporate during flight*], KhNTUSG, Kharkiv, 304 p.
16. Staricyn, M.A. and Jahontov, S.V. (2014), “Vychislenie veshhestvennoy W-funkcii Lambert a W_0 v predelah FP / LINSPEACE” [Calculation of the real Lambert W-function W_0 within FP / LINSPEACE], *Applied and discrete mathematics*, No. 3(25), pp. 111-116.
17. Yakhontov, S.V., Kosovskiy, N.K. and Kosovskaya, T.M. (2012), “Effektivnyye po vremeni i pamyati algoritmicheskiye priblizheniya chisel i funktsiy” [*Time and memory efficient algorithmic approximations of numbers and functions*], SpbGU, St. Petersburg, 256 p.

18. Karatsuba, Ye.A. (1991), "Bystrye vychisleniya transtsendentnykh funktsiy" [Rapid computation of transcendental functions], *Problems of information transmission*, Vol. 27, No. 4, pp. 76-99.
19. Fikhtengolts, G.M. (1962), "Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom II" [Differential and integral calculus course. Vol. II], Nauka, Moscow, 807 p.
20. Smirnova, T.N. (1968), "Obrashcheniye ryada s pomoshch'yu polinomial'nogo proraba na EVM tipa M-20" [Inverting a series using a polynomial foreman on a computer of the type M-20], *Proceedings of the Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences*, Vol. 96, pp. 64-67.
21. Bronshteyn, I.N. and Semendiyayev, K.A. (1981), "Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov" [A reference book on mathematics for engineers and students of technical colleges], Nauka, Moscow, 719 p.
22. Popov, B.A. and Tesler, G.S. (1984), "Vychisleniye funktsiy na EVM" [Calculation of functions on a computer], Naukova dumka, Kyiv, 598 p.
23. Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1963), "Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy" [Tables of integrals, sums, series and products], Nauka, Moscow, 1108 p.
24. Parker, F.D. (1955), Integrals of inverse functions, *II Amer. Math. Month.*, Vol. 62, No. 6, pp. 439-440.
25. Kalman, D. (2001), A generalized logarithm for exponential-linear equations, *II Reprint from College Math. Journal*. Vol. 32, No. 1.
26. Markushin, V.E., Rosenfelder, R. and Schreiber, A.W. (2003), The W_t transcendental function and quantum mechanics applications, *arXiv: math-ph/0104019v2*, 10 Jan.
27. Kaluzhnyi, L.A. (1973), "Vvedeniye v obshchuyu algebru" [Introduction to general algebra], Nauka, Moscow, 448 p.
28. Demidovich, B.P. and Maron, I.A. (1966), "Osnovy vychislitel'noy matematiki" [Fundamentals of Computational Mathematics], Nauka, Moscow, 664 p.
29. Aleksandrova, N.V. (2013), "Iz istorii vektornogo ischisleniya" [From the history of vector calculus], Book House "LIBROKOM", 272 p.

Надійшла до редколегії 14.07.2020

Схвалена до друку 18.08.2020

Відомості про авторів:

Гадецька Світлана Вікторівна

кандидат фізико-математичних наук доцент
доцент Харківського національного
автомобільно-дорожного університету,
Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0002-9125-2363>

Дубницький Валерій Юрійович

кандидат технічних наук
старший науковий співробітник
старший науковий співробітник
навчально-наукового інституту "Каразінський
банківський інститут" Харківського національного
університету ім. В.Н. Каразіна,
Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0003-1924-4104>

Кушнерук Юрій Іонович

кандидат технічних наук доцент
доцент Харківського національного університету
Повітряних Сил ім. І. Кожедуба,
Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0002-6833-6462>

Ходирєв Олександр Іванович

старший викладач навчально-наукового інституту
"Каразінський банківський інститут" Харківського
національного університету ім. В.Н. Каразіна,
Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0001-9871-9440>

Information about the authors:

Svitlana Gadetska

PhD in Physics and Mathematics Associate Professor
Senior Lecturer of Kharkiv National
Automobile and Highway University,
Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0002-9125-2363>

Valeriy Dubnitskiy

Candidate of Technical Sciences
Senior Research
Senior Research Associate
of "Karazin Banking Institute"
of V.N. Karazin Kharkiv
National University,
Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0003-1924-4104>

Youriy Kushneruk

Candidate of Technical Sciences Associate Professor
Senior Lecturer of Ivan Kozhedub
Kharkiv National Air Force University,
Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0002-6833-6462>

Alexander Khodyrev

Senior Instructor
of "Karazin Banking Institute"
of V.N. Karazin Kharkiv National University
Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0001-9871-9440>

Шевяков Юрій Іванович

доктор технічних наук доцент
 директор Інституту цивільної авіації
 Харківського національного університету
 Повітряних Сил ім. І. Кожедуба,
 Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0002-5322-6674>

Iurii Sheviakov

Doctor of Technical Sciences Associate Professor
 Director of the Civil Aviation Institute
 of Ivan Kozhedub Kharkiv
 National Air Force University,
 Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0002-5322-6674>

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КАЛЬКУЛЯТОР ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА $W_0(x)$ И РОДСТВЕННЫХ ЕЙ ФУНКЦИЙ

С.В. Гадецкая, В.Ю. Дубницкий, Ю.И. Кушнерук, А.И. Ходырев, Ю.И. Шевяков

Предложен специализированный программный калькулятор, предназначенный для вычисления значений функции Ламберта $W_0(x)$ и родственных ей функций. Описана его программная реализация и приведены примеры вычислений. Калькулятор позволяет вычислять значения верхней ветви функции Ламберта, величину обратную величине функции Ламберта, логарифм функции Ламберта, экспоненту, показатель степени которой равен функции Ламберта, значения первой и второй производных, значения обобщённого логарифма, обобщённого тангенса, обобщённого котангенса, обобщённого синуса, обобщённого косинуса, гиперболический обобщённый тангенс, гиперболический обобщённый котангенс, гиперболический обобщённый синус, гиперболический обобщённый косинус. Калькулятор позволяет вычислять значения двух наиболее распространённых видов определённых интегралов, подынтегральная функция которых содержит функцию Ламберта. Проведено сравнение различных способов вычисления значений функции Ламберта и рекомендованы области их применения.

Ключевые слова: специализированный программный калькулятор, функция Ламберта, функции, родственные функции Ламберта, обращение ряда, интегрирование обратных функций.

DEDICATED PROGRAMMABLE CALCULATOR FOR VALUE FINDING OF LAMBERT $W_0(x)$ FUNCTION AND RELATED FUNCTIONS

S. Gadetska, V. Dubnitskiy, Y. Kushneruk, A. Khodyrev, Iu. Sheviakov

A dedicated programmable calculator serves to find values of Lambert $W_0(x)$ function and related functions. Its software implementation is described and calculation examples specified. The calculator enables finding of values for top branch of Lambert function, reciprocal of Lambert function, logarithm of Lambert function, exponent whose index of power equals Lambert function, values of the first and second derivatives, values of generalized logarithm, generalized tangent, generalized cotangent, generalized sine, generalized cosine, hyperbolic generalized tangent, hyperbolic generalized cotangent, hyperbolic generalized sine, hyperbolic generalized cosine. The calculator permits to compute values of two most widely used types of certain integrals, whose integrand contains Lambert function. Various methods of Lambert function value calculation were compared and their applicability advised. Lambert function expansion by powers of variable x was shown to be valid only at the vicinity of zero. Relative error variation plots are specified which emerge at application of these procedures. The most feasible calculation of Lambert function values was shown to be executed either by approximation formulas or by solving equations which determine this function and are related to it. Methods of power series inversion and inverse function integration are discussed in much detail. These methods were used in our work, and the procedure of Lambert function integration as implicit function has been implemented in proposed calculator. The necessity to have a program for calculation of Lambert function values whose text is accessible to its authors is shown at an example of comparison between two programs intended for solution of algebraic equations. One of these programs made in one case a basic error in result, though running of its working module remained unchanged.

Keywords: dedicated programmable calculator, Lambert function, functions related to Lambert functions, inversion of series, integration of inverse functions.