О.К. Фурсенко, Н.М. Черновол

Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

ЛАНЧЕСТЕРОВСЬКІ МОДЕЛІ БОЙОВИХ ДІЙ

Пропонується матеріал для викладання у вищих військових навчальних закладах з предмету “Вища математика” в розділі “Диференціальні рівняння” та з предмету “Прикладна математика” в розділах “Операційне числення” та “Теорія ймовірностей”. Розглянуто шість моделей Ланчестера у вигляді системи двох або трьох диференціальних рівнянь, що описують середні чисельності двох угруповань в процесі бою. До кожної з моделей наведено приклади, розв’язок яких дає можливість зробити прогноз: перемогою якого із угруповань і через який час закінчиться бій і які будуть втрати угруповання, що переможе. Крім того, до однієї з моделей розглянуто інший підхід, який теж дає можливість зробити прогноз бою.

Ключові слова: рівняння Ланчестера, рівняння динаміки бою, система диференціальних рівнянь, ефективна скорострільність, бойова одиниця.

Вступ

Постановка проблеми. В умовах бурхливого розвитку комп’ютерних та інформаційних технологій в сучасних умовах важливою є роль математичних компетенцій як частини професійних компетенцій фахівців різного профілю, в тому числі і майбутніх офіцерів. При цьому слід зазначати зростання ролі математики не тільки як мови точних наук, а отже і мови військово-технічних і військово-спеціальних дисциплін, а і її безпосереднє використання для оцінювання ефективності нових видів зброї, прогнозування наслідків бою, моделювання нових технологій організації і ведення бойових дій.

Серед ієрархії математичних моделей бойових дій важливе місце належить ланчестерівським моделям [1–2]. Вони пройшли більш як сторічну історію розвитку і життя показало їх ефективність. Велике різноманіття цих моделей різного рівня складності потребує їх аналізу, систематизації з метою введення в навчальний процес вищих військових навчальних закладів (ВВНЗ) в курси вищої і прикладної математики.

При цьому необхідно в умовах обмеженості часу, що виділяється для вивчення математики майбутніми офіцерами, органічно вписати даний матеріал в програми навчальних дисциплін і при цьому зберегти основне раціональне зерно в моделях, що пропонуються. Це підкреслить значення для курсантів вивчення математичних дисциплін і підготує їх до засвоєння і використання в майбутній професійній діяльності сучасних методів моделювання бойових дій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питаннями професійно орієнтованого викладання вищої математики в вищих навчальних закладах

займались, наприклад, в роботах [3–6]. Але що стосується професійно орієнтованого викладання математичних дисциплін в ВВНЗ, то питання залишається не достатньо вивченим. Відома спроба вказати на задачі на базі рівнянь Ланчестера, які можна використати при проведенні практичних занять з теми “Диференціальні рівняння” в ВВНЗ в роботі [7]. В останній час моделям типа Ланчестера присвячено багато робіт, наприклад, [8–17]. Тому можна більш докладно вивчити питання введення в курс не тільки вищої математики а і прикладної математики в ВВНЗ моделей Ланчестера.

Мета статті – проаналізувати відомі в літературі ланчестерівські моделі і запропонувати доступні моделі для засвоєння курсантами ВВНЗ в програмах вищої і прикладної математики.

Виклад основного матеріалу

1. Моделі динаміки бою для викладання з предмету “Вища математика” в розділі “Диференціальні рівняння”

Розглянемо спочатку найпростішу модель Ланчестера, що докладно розглянута в [1]. Ця модель названа автором як модель А або модель “високоорганізованого бою”. Згідно цієї моделі бій проводиться при наступних умовах:

1. В бою беруть участь два угруповання: сторона 1 і сторона 2. У складі сторони 1 – N_1 однорідних бойових одиниць (наприклад, танків, кораблів, літаків, ракетних установок). У складі сторони 2 – N_2 однорідних бойових одиниць, не обов’язково однорідних з бойовими одиницями сторони 2;

2. Кожна бойова одиниця сторін проводить випадковий потік пострілів по цілі зі середньою скорострільністю (для сторони 1 – λ_1 , для сторони

$2 - \lambda_2$), потік пострілів є пуассонівським. (Середньою скорострільністю бойової одиниці називають середню кількість пострілів в одиницю часу);

3. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює для сторони 1 – p_1 , для сторони 2 – p_2 ;

4. Одним пострілом можна знешкодити не більш ніж одну бойову одиницю;

5. Якщо бойова одиниця знешкоджена, вогонь миттєво переноситься на іншу, а сама уражена одиниця в подальших бойових діях не бере участі.

6. В будь-який момент часу сумарна бойова міць кожного угруповання пропорційна не самому випадковому числу бойових одиниць, що збереглися неушкодженими, а його середньому значенню (це припущення особливо природно для багаточисельних угруповань).

Зауважимо, що бій називається високоорганізованим завдяки умові 5.

Позначимо $y_1(t)$ – середнє число бойових одиниць сторони 1, які є неураженими в момент часу t , $y_2(t)$ – середнє число бойових одиниць сторони 2, які є неураженими в момент часу t . Назвемо $y_1(t)$ і $y_2(t)$ середніми чисельностями сторін в момент часу t .

Введемо числа $\alpha_1 = \lambda_1 p_1$, $\alpha_2 = \lambda_2 p_2$.

Якщо λ_i ($i = 1, 2$) – середня скорострільність бойової одиниці, то α_i ($i = 1, 2$) – середня ефективна скорострільність цієї одиниці (середня кількість успішних пострілів в одиницю часу).

Тоді система диференціальних рівнянь, що описує середню чисельність сторін 1 і 2 в процесі бою має вигляд (див. [1]):

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha_2 y_2, \\ y_2' = -\alpha_1 y_1. \end{cases} \quad (1)$$

Початкові умови: $y_1(0) = N_1$, $y_2(0) = N_2$.

Розв'язується система (1) методом виключення. Можна проаналізувати з курсантами “високоорганізований бій” на наступному прикладі.

Приклад 1. Відбувається бій між двома угрупованнями: 50 батарей сторони 1 ведуть контрбатарейну боротьбу з 25 батареями сторони 2. Батареї сторони 1 мають середню скорострільність 0,25 пострілів в хвилину, ймовірність влучення при кожному пострілі 0,64. Батареї сторони 2 мають скорострільність 0,5 пострілів в хвилину, ймовірність влучення при кожному пострілі 0,5. Зробити прогноз розвитку бою: вказати, перемогою якої із сторін і через який час закінчиться бій і які будуть приблизно втрати сторони-переможниці.

Розв'язання.

Маємо: $N_1 = 50$, $\lambda_1 = 0,25$, $p_1 = 0,64$; $N_2 = 25$, $\lambda_2 = 0,5$, $p_2 = 0,5$.

Система диференціальних рівнянь, що описує середню чисельність сторін 1 і 2 в процесі бою має вигляд (1). Початкові умови:

$$y_1(0) = 50, \quad y_2(0) = 25.$$

Обчислимо $\alpha_1 = \lambda_1 p_1 = 0,16$, $\alpha_2 = \lambda_2 p_2 = 0,25$. Підставимо в систему (1):

$$\begin{cases} y_1' = -0,25 y_2, \\ y_2' = -0,16 y_1. \end{cases} \quad (1)$$

Розв'яжемо методом виключення. З першого рівняння знайдемо y_2 : $y_2 = -4y_1'$. Обчислимо: $y_2' = -4y_1''$. Підставимо у друге рівняння отриманої системи:

$-4y_1'' = -0,16y_1 \Leftrightarrow y_1'' - 0,04y_1 = 0$. Останнє рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язання таке.

Характеристичне рівняння і його корені: $\lambda^2 - 0,04 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 0,2$. Загальний розв'язок:

$$y_1(t) = C_1 e^{0,2t} + C_2 e^{-0,2t}.$$

Знайдемо похідну від $y_1(t)$: $y_1'(t) = 0,2C_1 e^{0,2t} - 0,2C_2 e^{-0,2t}$. Тоді:

$$y_2(t) = -4y_1'(t) = -0,8C_1 e^{0,2t} + 0,8C_2 e^{-0,2t}.$$

Отже, розв'язок системи:
$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{0,2t} + C_2 e^{-0,2t} \\ y_2(t) = -0,8C_1 e^{0,2t} + 0,8C_2 e^{-0,2t}. \end{cases}$$

Враховуючи початкові умови, маємо систему для знаходження C_1, C_2 :
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 50 \\ -0,8C_1 + 0,8C_2 = 25. \end{cases}$$
 Отримуємо:

$C_1 = 9,375$, $C_2 = 40,625$. Таким чином, чисельності сторін 1 і 2 в процесі бою в момент часу:
$$\begin{cases} y_1(t) = 9,375e^{0,2t} + 40,625e^{-0,2t} \\ y_2(t) = -7,5e^{0,2t} + 32,5e^{-0,2t}. \end{cases}$$
 Оскільки $y_1(t) \neq 0$

ні при яких t , тому сторона 1 переможе.

Розв'яжемо: $y_2(t) = 0$; $7,5e^{0,2t} = 32,5e^{-0,2t}$; $t \approx 3,66$.

Таким чином, бій закінчиться приблизно через 3 хвилини 40 секунд. Обчисливши $y_1(3,66) \approx 39,03$, отримуємо, що втрати сторони 1 – приблизно 11 батарей.

Наступною простою моделлю динаміки бою є модель В або модель “поганоорганізованого бою”, яка розглянута в [1–2].

При виведенні рівнянь Ланчестера моделі А припускалось, що інформація про враження цілі поступає миттєво, як тільки бойова одиниця противника знищена, бойова одиниця, що вразила цю ціль одразу переносить вогонь на іншу ціль (тобто по

враженим бойовим одиницям не стріляють). Розглянемо бій, при якому інформація про враження цілі відсутня і переніс вогню не відбувається.

Розглянемо постановку задачі моделі А, де замість умови 5 виконується Умова

5'. Інформація про враження цілі відсутня і переніс вогню не відбувається.

Система диференціальних рівнянь, що описує середню чисельність сторін 1 і 2 в процесі бою має вигляд:

$$\begin{cases} y_1' = -\frac{\alpha_2}{N_1} y_2 y_1 \\ y_2' = -\frac{\alpha_1}{N_2} y_1 y_2. \end{cases} \quad (2)$$

Для розгляду цієї моделі можна запропонувати розв'язати наступний приклад.

Приклад 2. Сторона 1 робить напад на сторону 2 за допомогою 16 літаків. Сторона 2 веде оборону за допомогою 8 систем ППО. Кожен літак сторони 1 робить в середньому 8 прицільних пострілів в хвилину, а система ППО сторони 2 робить в середньому 10 пострілів в хвилину. Ймовірність влучення при кожному пострілі сторони 1 дорівнює 0,2, а ймовірність влучення при кожному пострілі сторони 2 дорівнює 0,4. Визначити результати бою через 5 хвилин.

Узагальненням моделі А є модель С, що висвітлюється в [1]. Назвемо цю модель як “високоорганізований бій з поповненням”.

Постановка задачі така, як для моделі А, але є ще одна умова (крім 1–6):

7. Кожна сторона за одиницю часу поповнюється бойовими одиницями (сторона 1 – $n_1(t)$ одиницями, сторона 2 – $n_2(t)$ одиницями).

Як пояснено в [1], система диференціальних рівнянь, що описує середню чисельність сторін 1 і 2 в процесі бою:

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha_2 y_2 + n_1(t) \\ y_2' = -\alpha_1 y_1 + n_2(t). \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язується ця система методом виключення.

Запропонуємо наступний приклад.

Приклад 3. Відбувається високоорганізований бій з поповненням між двома угрупованнями: сторона 1 у складі 20 бойових одиниць і сторона 2 у складі 24 одиниць. Бойові одиниці сторони 1 мають середню скорострільність 8 пострілів за годину, ймовірність влучення при кожному пострілі 0,5, поповнюються 2 одиницями за годину. Бойові одиниці сторони 2 мають середню скорострільність 2,5 пострілів за годину, ймовірність влучення при кожному пострілі 0,4, поповнюються 4 одиницями. Зробити прогноз розвитку бою: вказати, перемогою якої із сторін і через який час закінчиться бій і скільки

приблизно неуразених бойових одиниць залишиться у сторони-переможниці.

Зауваження 1: при виводі рівнянь моделей А, В і С припускали, що постріл, направлений по одній із бойових одиниць, може знешкодити тільки цю бойову одиницю і не може знешкодити інші. Таке припущення вірне тільки для снарядів малої потужності або для розсереджених цілей. Тобто снаряд може мати радіус дії (може знешкоджувати декілька бойових одиниць). Додамо до умов, наприклад моделі А, що бойові одиниці мають деякий радіус дії: нехай k_1 – середнє число сусідніх (додаткових) одиниць, що знешкоджуються бойовою одиницею сторони 1 за постріл, k_2 – середнє число сусідніх (додаткових) одиниць, що знешкоджуються бойовою одиницею сторони 2 за постріл. Тоді система диференціальних рівнянь, що описує середню чисельність сторін 1 і 2 в процесі такого бою має вигляд [1]:

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha_2 y_2 - \frac{\alpha_2 k_1}{N_1} y_2 y_1; \\ y_2' = -\alpha_1 y_1 - \frac{\alpha_1 k_2}{N_2} y_1 y_2. \end{cases}$$

Тобто, чим більше враховується факторів, що впливають на бій, тим складніші рівняння.

За допомогою рівнянь динаміки бою можна врахувати і інші фактори, як попереджуючий удар однієї сторони, темп мобілізації сил, закінчення боєприпасів на деякий час і їх відновлення і т.д. В цьому випадку α_1 і α_2 будуть змінюватися по деякому закону: $\alpha_1 = \alpha_1(t)$, $\alpha_2 = \alpha_2(t)$.

Зауваження 2: розглянемо модель С і нехай бій затяжний і відомий коефіцієнт, що вказує на інтенсивність втрат бойових одиниць внаслідок хвороб за одиницю часу (β_1 – для сторони 1, β_2 – для сторони 2). Тоді система для опису середніх чисельностей обох сторін буде мати вигляд [7]:

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha_2 y_2 - \beta_1 y_1 + n_1(t) \\ y_2' = -\alpha_1 y_1 - \beta_2 y_2 + n_2(t). \end{cases}$$

Таку задачу теж можна розглянути в курсі вищої математики.

Наступною моделлю, яку можна запропонувати курсантам, є модель D. Вона розглянута, наприклад, в [8–9]. Назвемо її моделлю “мішаного бою”.

Розглянемо припущення задачі моделі А, де замість умови 5 інша умова:

5''. якщо бойова одиниця знешкоджена стороною 2, то вогонь переноситься на іншу одиницю. Для сторони 1 інформація про враження цілі відсутня і переніс вогню не відбувається.

Скориставшись рівнянням в моделі А для y_1 і рівнянням в моделі В для y_2 , отримаємо наступну

систему, що описує середню чисельність сторін 1 і 2 в процесі бою:

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha_2 y_2 \\ y_2' = -\frac{\alpha_1}{N_2} y_1 y_2 \end{cases} \quad (4)$$

Цю систему теж неважко розв'язати. Тому пропонуємо наступний приклад.

Приклад 4. Нехай відбувається мішаний бій між двома угрупованнями танків. Для сторони 1:

$N_1 = 30$, $\lambda_1 = 10 \frac{\text{постр}}{\text{годину}}$, $p_1 = 0,4$. Для сторони 2:

$N_2 = 40$, $\lambda_2 = 4 \frac{\text{постр}}{\text{годину}}$, $p_2 = 0,5$. Зробити прогноз розвитку бою.

Також в розділі “Диференціальні рівняння” можна розглянути модель А з іншим аналізом, як запропоновано в [10]. Автором [10] вводиться показник $K(t) = \frac{y_1(t)}{y_2(t)}$, що характеризує співвідношення

сил сторін в процесі бою. Диференціюючи $K(t)$, і користуючись рівняннями системи (1), отримується диференціальне рівняння, що є рівнянням Ріккати для показника $K(t)$:

$$K' = \alpha_1 K^2 - \alpha_2. \quad (5)$$

Початкова умова: $K(0) = \frac{N_1}{N_2}$. Ввівши заміну

$$U = \frac{1}{K - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}, \text{ рівняння (5) зводиться до рівняння,}$$

що є рівнянням з відокремлюваними змінними: $U' = -2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} U - \alpha_1$.

Розв'язавши це рівняння з початковою умовою

$$U(0) = \frac{1}{K(0) - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}, \text{ знайдемо } U(t), \text{ а потім}$$

$$K(t) = \frac{1}{U(t)} + \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}. \text{ Відмінність такого розгляду}$$

полягає в тому, що не знаходячи чисельності $y_1(t)$, $y_2(t)$, можна зробити прогноз бою. Якщо

$$K(0) < \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \text{ показник співвідношення сил } K(t)$$

спадає і якщо $K(t) = 0$, то переможе сторона 2.

Розв'язавши рівняння $K(t) = 0$, знаходимо час про-

довження бою. При $K(0) > \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$ функція $K(t)$ зро-

стає і якщо $K(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_0$, то переможе сторона 1. Відповідно час продовження бою дорів-

нює t_0 . Зауважимо, що в будь-який допустимий момент часу t , що відповідає нерівності $K(t) \geq 0$, можна знайти перевагу однієї сторони над іншою.

Пропонується розглянути приклад 1 і, знаючи параметр $K(t)$, зробити прогноз бою: яка сторона переможе і через який час.

Розв'язання.

Маємо $\alpha_1 = 0,16$, $\alpha_2 = 0,25$. Тоді рівняння (5)

буде мати вигляд $K' = 0,16K^2 - 0,25$.

Початкова умова: $K(0) = 2$. Зробимо заміну

$$U = \frac{1}{K - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} = \frac{1}{K - \frac{5}{4}}. \text{ Тоді } K = \frac{1}{U} + \frac{5}{4}. \text{ Отримуємо}$$

рівняння: $U' = -0,4U - 0,16$. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Розв'язання таке:

$$\frac{dU}{dt} = -0,4U - 0,16, \quad \frac{dU}{U + 0,4} = -0,4t,$$

$$\ln|U + 0,4| = -0,4t + C_1, \quad U = Ce^{-0,4t} - 0,4. \quad \text{Врахову-}$$

$$\text{ючи початкову умову } U(0) = \frac{1}{K(0) - \frac{5}{4}} = \frac{4}{3}, \text{ маємо:}$$

$$\frac{4}{3} = C - 0,4; C = \frac{26}{25}. \text{ Отже, } U(t) = \frac{26}{25}e^{-0,4t} - 0,4.$$

Тому показник співвідношення сил сторін:

$$K(t) = \frac{1}{\frac{26}{25}e^{-0,4t} - 0,4} + \frac{5}{4} = \frac{\frac{13}{6}e^{-0,4t} + 0,5}{\frac{26}{15}e^{-0,4t} - 0,4}.$$

Знаменник останнього дробу прямує до нуля при

$$t \rightarrow t_0 = 2,5 \ln \frac{13}{3} \approx 3,66. \text{ Отже, при } t \rightarrow t_0,$$

$K(t) \rightarrow +\infty$. Звідси випливає, що приблизно через 3 хвилини 40 секунд сторона 1 переможе.

Зауважимо, що отримали той самий результат, але цей спосіб не дає змоги вказати, скільки неушкоджених одиниць залишиться у сторони 1.

2. Модель динаміки бою для викладання з предмету “Прикладна математика” в розділі “Операційне числення”

Розглянемо модель, що викладена в [11]. Нехай відбувається бій між двома угрупованнями. Сторона 1 має в своєму складі N_1 бойових одиниць і N_2 бойових одиниць, різномірних з N_1 одиницями. Сторона 2 має N_3 бойові одиниці. Будемо дотримуватись форми організації ведення бою, яка відповідає моделі бою А. Тоді середні чисельності $y_1(t)$, $y_2(t)$ угруповань сторони 1 і $y_3(t)$ сторони 2 описуються системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha_3 \gamma_{31} y_3 \\ y_2' = -\alpha_4 \gamma_{32} y_3 \\ y_3' = -\alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2, \end{cases} \quad (6)$$

де α_1, α_2 – середні ефективні скоростріельності сторони 1, α_3, α_4 – середні ефективні скоростріельності сторони 2, γ_{31}, γ_{32} – коефіцієнти цілерозподілу (частка бойових одиниць сторони 2, які виділяються для ураження цілей із складу N_1 і N_2 сторони 1 з урахуванням їх важливості на момент часу t). Початкові умови:

$$y_1(0) = N_1, y_2(0) = N_2, y_3(0) = N_3. \quad (7)$$

Розв'язок системи (6) знаходиться наступним чином. Застосувавши перетворення Лапласа до системи (6), отримаємо систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно зображень $Y_1(p), Y_2(p), Y_3(p)$ середніх чисельностей:

$$\begin{cases} pY_1(p) - N_1 = -\alpha_3 \gamma_{31} Y_3(p); \\ pY_2(p) - N_2 = -\alpha_4 \gamma_{32} Y_3(p); \\ pY_3(p) - N_3 = -\alpha_1 Y_1(p) - \alpha_2 Y_2(p). \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему і перейшовши до оригіналів, отримаємо частинний розв'язок системи (6) при початкових умовах (7). По цьому розв'язку можна зробити прогноз бою. Для розгляду пропонуємо наступний приклад.

Приклад 5. Нехай відбувається бій між двома угрупованнями: 20 танків і 30 артилеристів сторони 1 і 60 танків сторони 2. Крім того, для сторони 1: середня ефективна скоростріельність танків – 8 пострілів за годину, для артилеристів – 6 пострілів за годину. Для сторони 2: середня ефективна скоростріельність танків по танкам – 5 пострілів за годину, коефіцієнт цілерозподілу – 0,6; середня ефективна скоростріельність танків по артилеристам – 5 пострілів за годину, коефіцієнт цілерозподілу – 0,4. Зробити прогноз розвитку бою: вказати, перемогою якої із сторін і через який час закінчиться бій і які будуть приблизно втрати сторони-переможниці.

3. Модель динаміки бою для викладання з предмету “Прикладна математика” в розділі “Теорія ймовірностей”

Розглянемо модель, що докладно описана в [12]. Бій проводиться між двома угрупованнями при умовах 1,4,5',6 (див. формулювання умов для моделей А,В), а замість умов 2,3 розглядається наступна умова: кожна бойова одиниця сторін виконує пуасонівський потік уражаючих пострілів з відповідними інтенсивностями (сторона 2 по стороні 1 з інтенсивністю, що дорівнює $\lambda_2 q_2 r_2$, де λ_2 – середня скоростріельність бойової одиниці сторони 2, q_2 – ймовірність накривання цілі сторони 1 областю розривів, r_2 – умовна ймовірність ураження цілі за умови, що

вона накрита зоною рівномірного розсіювання; сторона 1 по стороні 2 з інтенсивністю що дорівнює $\lambda_1 q_1 r_1$, де λ_1, q_1, r_1 визначаються відповідно аналогічно параметрам λ_2, q_2, r_2). В [12] побудована модель бою наступним чином. Розглянуто по два стани для кожної сторони, в яких може перебувати бойова одиниця: S_1 (відповідно S_2) – бойова одиниця сторони 1 (відповідно сторони 2) не уражена, S_3 (відповідно S_4) – бойова одиниця сторони 1 (відповідно сторони 2) уражена. Вважається, що в системі $S = (S_1, S_2, S_3, S_4)$ протікає марківський процес з дискретною множиною станів і неперервним часом. Позначимо $P_i(t)$ – ймовірність того, що в момент часу t система S знаходиться в стані S_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Процес переходу системи S із стану в стан зображується графом (рис. 1).

Рис. 1. Граф станів бойових одиниць сторін 1 і 2
Джерело: розроблено авторами.

Тут α_{13} (відповідно α_{24}) – інтенсивності переходу системи із стану S_1 в стан S_3 (відповідно із стану S_2 в стан S_4). На основі графа отримуємо систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей $P_1(t)$ і $P_2(t)$ станів S_1 і S_2 відповідно:

$$\begin{cases} P_1' = -\alpha_{13} P_1 \\ P_2' = -\alpha_{24} P_2. \end{cases} \quad (8)$$

Виходячи з умов бою параметри α_{13} і α_{24} дорівнюють:

$$\alpha_{13} = \lambda_2 q_2 r_2, \quad \alpha_{24} = \lambda_1 q_1 r_1. \quad (9)$$

Підставивши (9) в (8) і скориставшись принципом квазірегулярності, отримаємо систему диференціальних рівнянь, що описує середні чисельності $y_1(t)$ і $y_2(t)$ бойових одиниць сторін 1 і 2 в момент часу t :

$$\begin{cases} y_1' = -\frac{\lambda_2 q_2 r_2}{N_1} y_1 y_2 \\ y_2' = -\frac{\lambda_1 q_1 r_1}{N_2} y_1 y_2. \end{cases}$$

Для розгляду цієї моделі пропонується приклад.

Приклад 6. Відбувається бій між двома угрупованнями: 20 бойових одиниць сторони 1 і 40 бойових одиниць сторони 2. Крім того, для сторони 1:

середня скорострільність – 4 постріли в хвилину, ймовірність накриття цілі областю розривів – 0,6, умовна ймовірність ураження цілі за умови, що вона накрита зоною рівномірного розсіювання – 0,2; для сторони 2: середня скорострільність – 2 постріли в хвилину, ймовірність накриття цілі областю розривів – 0,4, умовна ймовірність ураження цілі за умови, що вона накрита зоною рівномірного розсіювання – 0,2. Визначити результати бою через 10 хвилин.

Висновки

Дуже важливим при викладанні вищої і прикладної математики в вищих військових навчальних за-

кладах є питання розв'язання задач військової спрямованості. До розділів, де це питання можна вирішити, відносяться розділи: "Диференціальні рівняння", "Операційне числення", "Теорія ймовірностей". В роботі запропоновано вводити в навчальний процес в розділи "Диференціальні рівняння", "Операційне числення", "Теорія ймовірностей" вивчення моделей Ланчестера, які дають можливість робити прогноз військового протистояння. Вказане є важливим для мотивації вивчення вищої і прикладної математики, для покращення військової освіти майбутніх офіцерів.

Список літератури

1. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций: монография / Е.С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1964. – 388 с.
2. Основы исследования операций в военной технике: монография / Ю.В. Чуев, П.М. Мельников, С.И. Петухов, Г.Ф. Степанов, Я.Б. Шор. – М.: Советское радио, 1965. – 592 с.
3. Козлакова Г.О. Науково-методична підтримка розвитку вищої природничо-математичної освіти в технічних університетах / Г.О. Козлакова, Т.В. Ковалюк // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики: тези доповідей Всеукраїнської науково-методичної конференції. – Суми, 3-14 грудня 2009 р. – С. 208.
4. Хом'юк І.В. Про формування професійної спрямованості студентів технічних ВНЗ у процесі вивчення теорії ймовірностей / І.В. Хом'юк // Вісник Вінницького політехнічного університету. – 2004. – № 3. – С. 85-89.
5. Букатар М.І. З досвіду викладання вищої математики для студентів економічних спеціальностей / М.І. Букатар, І.І. Дрінь, В.П. Лавренчук // Методологія викладання математичних дисциплін для нематематичних спеціальностей у сучасних умовах: тези доповідей Всеукраїнської науково-методичної конференції. – Суми, 16-18 грудня 2009 р. – С. 39-41.
6. Бондаренко З.В. Якісний аналіз розв'язків систем диференціальних рівнянь як засіб формування деяких компонентів професійної культури студентів / З.В. Бондаренко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 1. – С. 115-120.
7. Хитряк О. Деякі застосування диференціальних рівнянь в військовій справі / О. Хитряк, М. Сорочатий, О. Петрученко // Збірник наукових праць Національної академії державної прикордонної служби України. – 2016. – № 1(67). – С. 319-330.
8. Пашков Н.Ю. Смешанная модель динамики средних для многочисленных группировок / Н.Ю. Пашков, В.П. Строгалева, В.Ю. Чуев // Оборонная техника. – 2010. – № 10(9). – С. 19-21.
9. Чуев В.Ю. "Смешанные" вероятностные модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок / В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй, Л.Н. Дьякова // Математическое моделирование и численные методы. – 2017. – № 1. – С. 91-101. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-1-91101>.
10. Буравлев А.И. Дифференциальное уравнение для количественного соотношения численностей противоборствующих сил / А.И. Буравлев // Вооружение и экономика. – 2009. – № 4(8). – С. 4-8.
11. Узагальнення аналітичної моделі бою для різномірних протидіючих угруповань / В.І. Грабчак, В.М. Супрун, А.О. Вакал, П.М. Петренко // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. – 2008. – № 2(17). – С. 10-13.
12. Грабчак В.І. Аналітична модель бою між протидіючими угрупованнями / В.І. Грабчак, В.М. Супрун, А.М. Заскока // Військово-технічний збірник. – 2012. – № 1(6). – С. 110-120.
13. Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок / В.Ю. Чуев // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. – 2011. – № 2. – С. 223-232.
14. Машкін О.О. Особливості чисельного вирішення диференціальних рівнянь моделей ланчестерського типу у стохастичній постановці / О.О. Машкін // Система обробки інформації. – 2020. – № 1(160). – С. 67-72. <https://doi.org/10.30748/soi:2020.160.08>.
15. Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий / Д.А. Новиков. – М.: НПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2012. – 62 с.
16. Чуев В.Ю. Стохастизм и детерминизм при моделировании двухсторонних боевых действий / В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. – 2017. – № 4. – С. 16-28. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-4-16-28>.
17. Чуев В.Ю. Вероятностная модель дуэльного боя с переменными эффективными скорострельностями / В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. – 2016. – № 3. – С. 118-124. <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2016-3-118-124>.

Відомості про авторів:**Фурсенко Олександр Кузьмич**

кандидат технічних наук доцент
завідувач кафедри
Харківського національного університету
Повітряних Сил ім. І. Кожедуба,
Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0002-8681-6742>

Черновол Наталія Миколаївна

старший викладач
Харківського національного університету
Повітряних Сил ім. І. Кожедуба,
Харків, Україна
<https://orcid.org/0000-0002-7988-7016>

Information about the authors:**Oleksandr Fursenko**

Candidate of Technical Sciences Associate Professor
Head of Department
of Ivan Kozhedub Kharkiv
National Air Force University,
Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0002-8681-6742>

Nataliya Chernovol

Senior Instructor
of Ivan Kozhedub Kharkiv
National Air Force University,
Kharkiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0002-7988-7016>

ЛАНЧЕСТЕРОВСКИЕ МОДЕЛИ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

А.К. Фурсенко, Н.Н. Черновол

Предлагается материал для изложения в высших военных учебных заведениях по предмету “Высшая математика” в разделе “Дифференциальные уравнения” и предмету “Прикладная математика” в разделах “Операционное исчисление” и “Теория вероятностей”. Рассмотрено шесть моделей Ланчестера в виде системы двух или трех дифференциальных уравнений, которые описывают средние численности двух группировок в процессе боя. К каждой из моделей приведен пример, решение которого дает возможность сделать прогноз: победой какой из группировок и через какое время закончится бой и какие будут потери группировки, которая победит. Кроме того, для одной из моделей рассмотрен другой подход, который так же дает возможность сделать прогноз боя.

Ключевые слова: уравнение Ланчестера, уравнение динамики боя, система дифференциальных уравнений, эффективная скорострельность, боевая единица.

LANCHESTER MODELS OF COMBAT OPERATIONS

O. Fursenko, N. Chernovol

The material for presentation in higher military educational institutions on the discipline “Higher mathematics” in the section “Differential equations” and the discipline “Applied mathematics” in the sections “Operational calculus” and “Probability theory” is offered. Four Lanchester models are presented for study in the section “Differential equations”. Namely, the conditions under which the battle takes place are formulated, the parameters of the battle are introduced, and a system of two differential equations is drawn up, which describes the average number of two groups in the process of battle. An example is provided for each model. The solution of the corresponding system makes it possible to provide a prediction of the battle: which faction will win and after what time the battle will end, and what will be the losses of the faction that will win. An example for the first model (model A) is given with the solution. In addition, a different approach to analyzing the progress of a battle using the parameter of the ratio of forces at any time is considered for Model A. Without solving the system, but solving only one differential equation of the first order, one can also analyze the battle: which group will win and after what time. An example is provided with a solution. Next, a model of combat dynamics is discussed for study in the Operational Calculus section. One of the groups consists of two disparate combat units. Therefore, the system consists of three differential equations. It is advisable to apply an operational method to its solution: apply the Laplace transform, obtain a system of three algebraic equations for images of average numbers, solve this system, go to the originals and thereby obtain a solution to the original system with initial conditions, and analyze the battle. An example is also given for this model. Finally, a combat dynamics model is proposed for consideration in the Probability Theory section. Based on the graph of states of combat units of two groupings, a system of two differential equations was obtained for the probabilities of states when a combat unit of the corresponding grouping is not destroyed. Further, based on the principle of quasi-regularity, a system of two differential equations was obtained for the average numbers of combat units of two groups at any time. An example is also given for this model. The study of these models is important for motivating the study of higher and applied mathematics, for improving the military education of future officers.

Keywords: Lanchester's equation, battle dynamics equation, system of differential equations, effective rate of fire, combat unit.